

## Helyvektorok, műveletek, vektorok a koordináta-rendszerben

- Rajzold meg az alábbi helyvektorokat a derékszögű koordináta-rendszerben, majd számítsd ki a hosszúságukat!  
a)  $(4; 2)$       b)  $(-5; 3)$       c)  $(-6; -3)$       d)  $(4; -2)$       e)  $(0; 0)$       f)  $(\sqrt{3}; 0)$   
g)  $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right)$       h)  $(-\sqrt{2}; -\sqrt{5})$       i)  $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; \frac{\sqrt{8}+3}{2}\right)$
- Határozd meg az  $\vec{a}(3; 4)$ ,  $\vec{b}(-4; 2)$  és  $\vec{c}(2; -5)$  vektorok tükörképének koordinátáit, ha azokat tükrözzük  
a) az  $x$  tengelyre!      b) az  $y$  tengelyre!      c) az origóra!  
d) az origón áthaladó és az  $x$  tengely pozitív felével  $45^\circ$ -os szöget bezáró egyenesre!
- Az  $\vec{a}(2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; -5)$  és  $\vec{c}(-3; 8)$  vektorokat  $90^\circ$ -kal elforgatjuk. Határozd meg az elforgatott helyvektorok koordinátáit! Írd fej azokat a vektorokat is, amelyek az eredeti vektorokból  $-90^\circ$ -os elforgatással adódnak!
- Legyen az  $\vec{a}(3; 5)$ ,  $\vec{b}(-4; 2)$  és  $\vec{c}(-2; -5)$ . Számítsd ki a következő vektorok koordinátáit!  
a)  $\vec{a} + \vec{b}$       b)  $\vec{a} - \vec{c}$       c)  $\vec{a} - 2\vec{b}$       d)  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$       e)  $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$   
Ábrázold a kapott helyvektorokat!
- Egy háromszög csúcsai:  $A(8; 2)$ ,  $B(6; 9)$ ,  $C(4; -3)$  Határozd meg az  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  koordinátáit.  
Rajzold meg az  $\overrightarrow{AB}$ -ral,  $\overrightarrow{BC}$ -ral és a  $\overrightarrow{CA}$ -ral egyenlő helyvektorokat! Számítsd ki a három vektor összegének koordinátáit! Számítsd ki a három vektor hosszát!
- A koordináta-rendszer origójából egy négyszög csúcsaihoz vezető vektorok rendre  $\mathbf{a}(1;3)$ ,  $\mathbf{b}(3;8)$ ,  $\mathbf{c}(8;6)$  és  $\mathbf{d}(6;1)$ . Mutasd meg, hogy a négyszög négyzet, és számítsd ki az oldalak hosszát!
- Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái  $(-2;3)$ ,  $(4;6)$  és  $(5;2)$ . Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit!
- Egy rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbik átlójának. A rövidebbik átló végpontjainak koordinátái  $(-3;7)$  és  $(5;11)$ . Határozd meg a másik két csúcs koordinátáit és a rombusz területét!
- Paralelogramma csúcsai-e az alábbi pontok:  $(-1;0)$ ,  $(3;-4)$ ,  $(5;2)$  és  $(11;-7)$ ?
- Egy paralelogramma két csúcsának koordinátái  $A(7;-1)$  és  $B(0;3)$ , a középpontjának koordinátái  $K(3;6)$ . Számítsd ki a másik két csúcs koordinátáit, az átlók és az oldalak hosszát!
- Egy négyzet két szomszédos csúcsának helyvektorai  $\mathbf{a}(5;-2)$  és  $\mathbf{b}(-4;4)$ . Írd fel a többi csúcs helyvektorait!
- Egy négyzet átlóinak metszéspontjának koordinátái  $(-4;7)$ , ebből a pontból az egyik oldal felezőpontjába mutató vektor koordinátái  $(2;-5)$ . Add meg a négyzet csúcsaiba mutató helyvektorokat és a négyzet területét!

## Az egyenes egyenlete

13. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek
- irányvektora  $\underline{v}(3;-4)$ , és áthalad a  $P(3;1)$  ponton;
  - irányvektora  $\underline{v}(-2;-5)$ , és áthalad a  $P(0;-4)$  ponton;
  - irányvektora  $\underline{v}(2;9)$ , és áthalad a  $P(7;0)$  ponton;
  - irányvektora  $\underline{v}(5;0)$ , és áthalad a  $P(1;3)$  ponton;
  - irányvektora  $\underline{v}(0;3)$ , és áthalad a  $P(-4;2)$  ponton!
14. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek
- normálvektora  $\underline{n}(-3;4)$ , és áthalad a  $P(3;1)$  ponton;
  - normálvektora  $\underline{n}(-3;-1)$ , és áthalad a  $P(0;-4)$  ponton;
  - normálvektora  $\underline{n}(-2;4)$ , és áthalad a  $P(7;0)$  ponton;
  - normálvektora  $\underline{n}(3;0)$ , és áthalad a  $P(1;3)$  ponton;
  - normálvektora  $\underline{n}(0;2)$ , és áthalad a  $P(-4;2)$  ponton!
15. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek
- áthalad a  $P_1(3;1)$  és  $P_2(-2;4)$  pontokon;
  - áthalad a  $P_1(4;-1)$  és  $P_2(-2;4)$  pontokon;
  - áthalad a  $P_1(-2;7)$  és  $P_2(-2;4)$  pontokon;
  - áthalad a  $P_1(-1;1)$  és  $P_2(1;4)$  pontokon;
  - áthalad a  $P_1(0;1)$  és  $P_2(0;4)$  pontokon!
16. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek
- meredeksége  $m = -\frac{3}{5}$ , és áthalad a  $P_1(3;1)$  pontokon;
  - meredeksége  $m = 3$ , és áthalad a  $P_1(4;-1)$  pontokon;
  - meredeksége  $m = -2$ , és áthalad a  $P_1(-2;7)$  pontokon;
  - meredeksége  $m = \sqrt{3}$ , és áthalad a  $P_1(-1;1)$  pontokon;
  - meredeksége  $m = \frac{1}{2}$ , és áthalad a  $P_1(0;1)$  pontokon!
17. Add meg a következő egyenesek irányvektorát, normálvektorát! Rendezd át az egyenes egyenletét úgy, hogy fejezd ki belőle az  $y$  ismeretlent, és add meg az egyenes meredekségét, és hogy hol metszi az  $y$  tengelyt!
- |                        |                               |                               |       |       |
|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------|-------|
| a. $3x - 4y = 2$       | $\underline{v}(\quad; \quad)$ | $\underline{n}(\quad; \quad)$ | $y =$ | $m =$ |
| b. $-2x + 5y = 10$     | $\underline{v}(\quad; \quad)$ | $\underline{n}(\quad; \quad)$ | $y =$ | $m =$ |
| c. $4y - 11x = 31$     | $\underline{v}(\quad; \quad)$ | $\underline{n}(\quad; \quad)$ | $y =$ | $m =$ |
| d. $6x = 8y - 16$      | $\underline{v}(\quad; \quad)$ | $\underline{n}(\quad; \quad)$ | $y =$ | $m =$ |
| e. $10x - 5y + 25 = 0$ | $\underline{v}(\quad; \quad)$ | $\underline{n}(\quad; \quad)$ | $y =$ | $m =$ |
18. Az egyenes négy irányjellemző adatából ( $\alpha$ ,  $m$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{n}$ ) egyet megadtunk. Add meg a többi jellemző értékét!
- |                             |                                   |                                  |                                    |
|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| <b>a.</b> $m = \frac{2}{3}$ | <b>b.</b> $\underline{v}(3; -7);$ | <b>c.</b> $\underline{n}(5; 3);$ | <b>d.</b> $\alpha = 66,04^\circ$ . |
|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|

19. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek

- irányvektora  $\vec{v}(2; -5)$ , és áthalad a  $P(3; -1)$  pontot!
- normálvektora  $\vec{n}(4; -3)$  és egy pontja a  $P(-2; 5)$  pont.
- áthalad a  $P_1(-2; 3)$  és  $P_2(4; -5)$  pontokon!
- irányszöge  $60^\circ$ , és egy pontja  $A(4;0)$
- egy pontja  $P(-2; 3)$  és meredeksége  $-2$
- két pontja  $A(-4; -2)$  és  $B(5; 6)$
- Számítsd ki a fenti egyeneseknek a tengelyekkel közös pontjaik koordinátáit.
- Ábrázold a fenti egyeneseket koordináta-rendszerben!

20. a) Add meg az  $e: 3x - 7y = 1$  egyenes egy normálvektorát, egy irányvektorát és a meredekségét!

- Számold ki annak a pontnak a második koordinátáját, melynek első koordinátája  $7$ , és rajta van az  $e$  egyenesen!
- Rajta van-e az  $A(-33; 12)$  pont az  $e$  egyenesen?

21. Ábrázold az egyeneseket koordináta-rendszerben!

a:  $4x + 3y - 12 = 0$

b:  $y = 2x + 3$

c:  $3x - 5y - 15 = 0$

d:  $y = -\frac{2}{3}x + 1$

e:  $x + 2y + 4 = 0$

f:  $y = -x - 2$

22. Egy háromszög három csúcsának koordinátái:  $A(7; 1)$ ,  $B(-2; 8)$ ,  $C(1; -5)$ . Írd fel az  $A$  csúcsból induló súlyvonal és az  $a$  oldalhoz tartozó középvonal egyenletét!

23. Milyen messze van a  $P(-1; 3)$  pont az  $e: 4x - 3y = 12$  egyenletű egyenestől?

(Talppont:  $T(3; 0)$ , távolság:  $5$ )

24. Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái  $A(12; 7)$ , egyik átlójának egyenlete  $e: 5x + y = 28$ . Adja meg az oldalegyeneseinek egyenletét!

(Csúcsok:  $B(3; 13)$ ,  $C(-3; 4)$ ,  $D(6; -2)$ ,  $AB: 6x + 9y = 135$ ,  $BC: 9x - 6y = -51$ ,  $CD: 6x + 9y = 18$ ,  $DA: 9x - 6y = 66$ )

25. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái  $A(5; 2)$ ,  $B(8; 6)$  és  $C(-3; 8)$ . Hol metszi az  $A$  csúcsból induló súlyvonal a  $B$  csúcsból induló magasságvonalat?

( $s_a: 10x + 5y = 60$ ,  $m_b: -4x + 3y = -14$ , metszéspont az  $A$  pont.)

26. Egy derékszögű háromszög két csúcsának koordinátái  $A(-1; 1)$  és  $B(7; -1)$ , egyik befogójának egyenlete  $x - 2y = -3$ . Adja meg a háromszög területét és kerületét!

27. Írd fel az egyenes egyenletét, amely az  $\overline{AB}$  vektorral párhuzamos, és átmegy a  $P$  ponton!

a.  $A(2; 5)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $P(-3; -1)$ ;

b.  $A(1; 4)$ ,  $B(-2; 2)$ ,  $P(4; 4)$ .

28. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az  $f: 4y + x = -12$  egyenessel, és átmegy a  $P(-5; 2)$  ponton!

29. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges az  $f: y = \frac{4}{7}x + 4$  egyenesre, és átmegy a  $P(3; 6)$  ponton!

### **Körre vonatkozó feladatok**

30. Egy rádióadó helye a koordináta-rendszerben a  $P(5; -4)$  pont, és az adás 13 egység sugarú körben fogható. **Döntsd el** az alábbi pontokról ábrázolás nélkül, hogy azokban fogható-e a rádióadás?  
 $A(-8; -4), B(0; 7), C(-10; 0), D(10; 8), E(16; 2), F(16; -2), G(-2; -16)$ .
31. **Írd fel** annak a körnek az egyenletét, melynek  
 a. középpontja az origó, sugara 10 egység;  
 b. középpontja a  $C(-3; 1)$  pont, sugara 4;  
 c. középpontja a  $C(10; 11)$  pont, sugara 20;  
 d. egy átmérőjének két végpontja  $A(-2; -4)$  és  $B(6; 2)$ !
32. **Írjd fel** az  $A(-6; 4)$  és  $B(2; -2)$  végpontú  $AB$  szakasz Thalész-körének egyenletét!
33. **Írd fel** annak a körnek az egyenletét, amelyik az  $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$  körrel koncentrikus, és  
 a. kétszer akkora sugarú;  
 b. áthalad az  $A(3; -5)$  ponton!
34. **Írd fel** annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a  $C$  pont, és érinti az  $e$  egyenest!  
 a.  $C(0; 0), e: y = -6$     b.  $C(-1; 2), e: x = 3$   
 c.  $C(3; -2), e: 4x - 3y = -7$     d.  $C(6; -4), e: 3x - 4y = -16$
35. **Határozzuk meg** a következő körök középpontját és sugarát!  
 a.  $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0$     b.  $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$   
 c.  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 21 = 0$     d.  $x^2 - 7x + y^2 + 2y + 13,25 = 0$
36. **Válasszuk ki** az alábbi egyenletekből a köregyenleteket!  
 a.  $x^2 + y^2 + 10x + 19 = 0$     b.  $8x^2 + 8y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$   
 c.  $x^2 - y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$     d.  $2x^2 + 2y^2 + 24x + 32y = 0$
37. **Határozd meg** a következő egyenletekkel megadott körök középpontját, sugarát!  
 a.  $x^2 + y^2 - 24x - 6y + 89 = 0$     b.  $x^2 + y^2 + 2,5x + 5y + 3,8125 = 0$   
 c.  $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$     d.  $3x^2 + 4x + 3y^2 - 8y = 0$
38. A  $k$  kör két pontja  $A(2; -1)$  és  $B(6; 7)$ , és középpontja illeszkedik a  $2y = x + 6$  egyenesre. **Válaszd ki**, hogy a következő egyenletek közül melyik lehet  $k$  egyenlete!  
 a.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$     b.  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$   
 c.  $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$     d.  $2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y + 5 = 0$
39. **Írd fel** annak a körnek az egyenletét, amelynek érintője az  $y = 4$  egyenes, azon az érintési pont a  $P(5; 4)$  pont, és a sugara 7 egység. Az egyenletet összeg alakban add meg!
40. **Írd fel** annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a  $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 14 = 0$  egyenletű kör területét, és illeszkedik az  $A(2; 5)$  pontra!

41. Az  $ABC$  derékszögű háromszög átfogójának két végpontja:  $A$  és  $B$ . A harmadik csúcsról tudjuk, hogy valamelyik koordinátatengelyre illeszkedik. **Határozd meg** a háromszög harmadik csúcsát! (**Ügyelj** a megoldások számára is!)

a.  $A(-7;-7), B(1;-1)$

b.  $A(-2;6), B(14;-6)$

c.  $A(-5;2), B(-5;-6)$

d.  $A(2;-6), B(6;2)$

### Kör és egyenes

42. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik érinti mindkét koordinátatengelyt, és áthalad az

a.  $A(1;-8)$

b.  $B(8;1)$

c.  $C(-4;2)$

d.  $D(-8;-9)$

ponton!

43. Írd fel a  $k$  kör  $P$  pontjába húzható érintőjének egyenletét!

a.  $k : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25, P(5;1);$

b.  $k : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 100, P(-7;-3);$

c.  $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 117 = 0, P(8;-1);$

d.  $x^2 + y^2 + 8x - 14y - 35 = 0, P(4;1).$

44. Írd fel az  $x^2 + y^2 = 169$  egyenletű kör 5 abszcisszájú pontjaiba húzható érintők egyenletét!

45. Egy kör átmegy az  $A(-11;6)$  és  $B(-14;3)$  pontokon. Az  $e : 2x + 7y = -21$  egyenletű egyenes átmegy a kör középpontján. Írd fel a kör egyenletét!

46. Határozd meg az  $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 20$  és az

a.  $y + 2x = -5$

b.  $x + 2y = 2$

c.  $-2x + 3y = 3$

egyenletű egyenes metszéspontjainak a számát!

47. Az  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$  egyenletű körnek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az  $A(8;2)$  és a  $B(10;-4)$  pontoktól?

48. Határozd meg a kör és egyenes kölcsönös helyzetét az alábbi feladatokban! Ha az egyenes metsző vagy érintő, akkor határozd meg az érintési, illetve a metszéspontokat is!

a.  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$  és  $y = x + 2;$

b.  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$  és  $x = -7;$

c.  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$  és  $y = x - 4;$

d.  $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 169$  és  $2x + 3y = 11.$

49. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának két csúcsa  $A(2;5)$  és  $B(10;1)$ , a harmadik csúcs az  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 90 = 0$  egyenletű körön található.

a. Melyek a háromszög harmadik csúcsának koordinátái?

b. Határozd meg a háromszög(ek) súlypontját!

c. Határozd meg a háromszög alapjának hosszát!

d. Mekkora a háromszög(ek) területe?