MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Sorozatok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy mértani sorozat első tagja 8, hányadosa 0,5. Számítsa ki a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_1 \cdot q^4 = 8 \cdot (0{,}5)^4 \Rightarrow a_5 = \mathbf{\frac{1}{2}}$ (2 pont)

2) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.

a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.

b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

Megoldás:

a) $a_2 = 17 = a_1 + d$ és $a_3 = 21 = a_1 + 2d$

$d = 4$ (1 pont)

$a_1 = 13$ (1 pont)

$a_{150} = a_1 + 149d = 609$ (1 pont)

$S_{150} = \frac{13 + 609}{2} \cdot 150$ (1 pont)

$S_{150} = \mathbf{46650}$ (1 pont)

b) Alkalmazzuk a hárommal való oszthatóság szabályát. (1 pont)
25863 számjegyeinek összege 24, így osztható 3-mal. (1 pont)
Tetszőleges sorrend esetén az összeg nem változik, tehát az állítás igaz. (1 pont)

c) Alkalmazzuk a néggyel való oszthatóság szabályát. (1 pont)
Ebben az esetben ez akkor teljesül, ha az utolsó két számjegy: 28; 32; 36; 52; 56; 68. (2 pont)
A tízes helyiértéken tehát 2; 3; 5; vagy 6 állhat. (1 pont)

Összesen: 12 pont

3) Egy kultúrpalota színháztermének a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a színpadtól távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 20 szék van, és minden megelőző sorban 2-vel több, mint a mögötte lévőben. 500 diák és 10 kísérő tanár pont megtöltik a nézőteret. Hány széksor van a nézőtéren? (12 pont)

Megoldás:

Legyen a széksorok száma: n. (1 pont)
A sorokban levő székek száma egy $d=2$ differenciájú számtani sorozat egymást követő elemeit adja. (1 pont)
$a_1 = 20$ (1 pont)
Az n-edik (első) sorban $a_n = 20+(n-1)\cdot 2$ szék van. (1 pont)
Az összes helyre az $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ alkalmazható. (1 pont)
$510 = \frac{n}{2}\cdot\left(20+20+(n-1)\cdot 2\right)$ (2 pont)
$2n^2+38n-1020=0$ (2 pont)
$n_1 = 15$ és $n_2 = -34$ (1 pont)
n_2 nem ad megoldást. (1 pont)
15 széksor van a nézőtéren. (1 pont)
Összesen: 12 pont

4) Mennyi annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek harmadik tagja 5, hatodik tagja pedig 40? (2 pont)

Megoldás:

$a_3 = a_1\cdot q^2 = 5$
$a_6 = a_1\cdot q^5 = 40$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{q=2}$ (1 pont)
Összesen: 2 pont

5) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)
b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeadott páratlan számok egy $d=2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. (1 pont)
Legyen az összeg legkisebb tagja a_1, ekkor $a_{55} = a_1 + 54\cdot 2$ (1 pont)
A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet alkalmazva:
$S_{55} = 55\cdot\frac{2a_1+54\cdot 2}{2} \Rightarrow 3905 = 55(a_1+54)$ (2 pont)
$\boldsymbol{a_1 = 17}$ (1 pont)

$\boldsymbol{a_{55} = 125}$ (1 pont)

Tehát a keresett páratlan számok a 17 és a 125. (1 pont)

Ellenőrzés: az összes valóban 3905. (1 pont)

b) A keresett számnak 5-re kell végződnie. (1 pont)

A 17 után a legkisebb ilyen szám a 25, de ez nem felel meg. (1 pont)

A következő szám 35, és ez jó, mert $35 = 5 \cdot 7$. (1 pont)

Tehát a keresett szám a 35. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája $-\frac{2}{3}$. Mekkora a sorozat negyedik eleme? (2 pont)

Megoldás:

A sorozat negyedik eleme $\mathbf{6}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

7) Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon? (3 pont)

b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele? (8 pont)

c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon? (3 pont)

d) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

Megoldás:

a) Számtani sorozatról van szó: $a_1 = 220$, d=10

$A_{11} = a_1 + 10d =$ (2 pont)

$= 220 + 10 \cdot 10 = 320$

320 métert aszfaltoznak le a 11. munkanapon. (1 pont)

b) $S_n \geq 7100$; $n = ?$, ahol n pozitív egész szám. (1 pont)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$7100 = \frac{2 \cdot 220 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n$$ (2 pont)

$$1420 = (44 + n - 1) \cdot n$$

$$n^2 + 43n - 1420 = 0$$ (2 pont)

Egyetlen pozitív megoldás van $(n \approx 21,88)$, (1 pont)

de ez nem egész. (1 pont)

Az aszfaltozással a **22. munkanapon** készülnek el. (1 pont)

c) $S_{21}=\frac{2\cdot 220+(21-1)\cdot 10}{2}\cdot n$ (1 pont)

$S_{21}=6720$ (1 pont)

Az utolsó munkanapon $7100-6720=$ **380** méter utat aszfaltoztak le. (1 pont)

d) Egyenes arányosság esetén 440 métert kellene aszfaltozni a 21. napon. (1 pont)

$a_{21}=2\cdot 220+20\cdot 10=420$ (1 pont)

Nem teljesül az egyenes arányosság. (1 pont)

Összesen: 17 pont

8) Egy mértani sorozat második eleme 32, hatodik eleme 2. Mekkora a sorozat hányadosa? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A feltételből $32q^4=2$, ahonnan (1 pont)

$\boldsymbol{q_1=\frac{1}{2}\left(=\sqrt[4]{0{,}0625}\right)}$ (1 pont)

$\boldsymbol{q_2=-\frac{1}{2}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

9)

a) Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:
- **számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;**
- **a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;**
- **ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 594 az eredmény. (10 pont)**

b) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai! (4 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a b) kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel! (3 pont)

Megoldás:

a) A háromjegyű szám számjegyei: $a-d$; a; $a+d$, ahol a a számtani sorozat középső tagja, d a differencia. (1 pont)

Felírható: $100(a-d)+10a+a+d=53{,}5\cdot 3a$ (1) (2 pont)

és $\left[100(a-d)+10a+a+d\right]-\left[100(a+d)+10a+a+d\right]=594$ (2) (2 pont)

A (2) egyenletből: $-198d=594$ (1 pont)

ahonnan $d=-3$ (1 pont)

Az (1) egyenletből: $111a-99d=53{,}5\cdot 3a$ (1 pont)

ahonnan $a=-2d$ (1 pont)

$a=-2\cdot(-3)=6$ a középső számjegy, a háromjegyű szám: **963**. (1 pont)

A feladat úgy is megoldható, ha a számtani sorozat első tagját jelöljük a-val.

b) A megfelelő számok:
234; 345; 456; 567; 678; 789; 246; 357; 468; 579; 258; 369. (4 pont)

c) Közülük 9-cel osztható: 234; 369; 468; 567. (1 pont)
A jó esetek száma 4; az összes eset 12. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$S_5 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (1 pont)

$S_5 = \frac{60}{2} \cdot 5$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_5 = 150}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

Megoldás:

a) A lehetséges sorrendek száma: 5! (2 pont)
Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet. (1 pont)

b) Az utolsó hétre az 5 unoka bármelyike egyenlő valószínűséggel kerül. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ (1 pont)

c) Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)
A mértani sorozatban $a_1 = 8,\ q = 1{,}2$ (2 pont)
A sál teljes hossza a mértani sorozat első n elemének összegeként adódik. (1 pont)

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (1 pont)

$200 = 8 \cdot \dfrac{1,2^n - 1}{0,2}$ (1 pont)

$5 + 1 = 1,2^n$ (1 pont)

$n = \dfrac{\lg 6}{\lg 1,2}$ (2 pont)

$n \approx 9,83$ (1 pont)

A sál a tizedik napon készül el. (1 pont)

Összesen: 17 pont

12) Egy számtani sorozat első tagja –3, differenciája –17. Számítsa ki a sorozat 100-adik tagját! Számítását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$a_1 = -3 \quad d = -17$

$a_{100} = -3 + 99 \cdot (-17) = \mathbf{-1686}$ (2 pont)

A sorozat 100-adik tagja: –1686. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Egy mértani sorozat első tagja –3, a hányadosa –2. Adja meg a sorozat ötödik tagját! Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ (1 pont)

$a_5 = (-3) \cdot (-2)^{(5-1)}$ (1 pont)

A sorozat ötödik tagja: **–48**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Egy mértani sorozat első tagja –5, hányadosa –2. Számítsa ki a sorozat tizenegyedik tagját! Indokolja a válaszát! (1 pont)

Megoldás:

$a_{11} = (-5) \cdot (-2)^{10}$

$\mathbf{a_{11} = -5120}$ (1 pont)

15) Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel.

a) Hány sort rakott le Angéla? (6 pont)

A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16 %-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezen kívül a többi sor két szélén levő 1–1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke.

b) Adja meg, hogy hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után! (6 pont)

Megoldás:

a) (A soronként elhelyezett járólapok számát annak a számtani sorozatnak egymást követő tagjai adják, amelyre:) $a_1 = 8,\ d = 2$. (1 pont)

$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$ (1 pont)

$= 858$ (1 pont)

$n^2 + 7n - 858 = 0$ (1 pont)

$n_1 = 26$ és $n_2 = -33$ (A megfelelő pozitív egész szám $\boldsymbol{n = 26}$.) (1 pont)

Angéla 26 teljes sort rakott le (ez a megoldás a feltételeknek megfelel). (1 pont)

b) A bordó járólapok száma 144. (2 pont)

A huszonhatodik sorba $a_{26} = a_1 + 25d = 8 + 50 = 58$ járólap került. (1 pont)

A burkolt rész peremére $8 + 58 + 2 \cdot 24 = 114$ bordó színű került. (1 pont)

30 bordó járólap maradt ki. (1 pont)

Összesen $900 - 858 = 42$ járólap maradt ki, ezek közül **12 szürke és 30 bordó**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16)

a) Egy számtani sorozat első tagja –7, a nyolcadik tagja 14. Adja meg *n* lehetséges értékeit, ha a sorozat első *n* tagjának összege legfeljebb 660. (9 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja ugyancsak –7, a negyedik tagja –189. Mekkora az *n*, ha az első *n* tag összege –68887? (8 pont)

Megoldás:

a) $a_8 = a_1 + 7d$, ahol d a sorozat differenciája.

$14 = -7 + 7d$ (1 pont)

$d = 3$ (1 pont)

$660 \geq S_n$ (1 pont)

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{-14 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$ (1 pont)

$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség bal oldalához kapcsolható másodfokú függvénynek minimuma van ($a = 3 > 0$, vagy grafikonra hivatkozás stb.), (1 pont)

zérushelyei: 24 és $-\frac{55}{3}$ (ami negatív). (1 pont)

$\left(-\frac{55}{3} < 0 <\right) n \le 24$ (1 pont)

Mivel a feladatunkban n pozitív egész, n lehetséges értékei: **1, 2, ..., 23, 24** (1 pont)

b) $a_4 = a_1 \cdot q^3$, ahol q a sorozat differenciája.

$-189 = -7 \cdot q^3$ (1 pont)

$q = 3$ (1 pont)

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)

$-68887 = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)

$3^n = 19683$ (2 pont)

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton), (1 pont)

$\boldsymbol{n = 9}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Melyik a 201-edik pozitív páros szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az $a_1 = 2$ első tagú, $d = 2$ differenciájú számtani sorozat felismerése. (1 pont)

$a_{201} = 2 + 200 \cdot 2 =$ (1 pont)

$= \mathbf{402}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Egy számtani sorozat ötvenedik tagja 29, az ötvenegyedik tagja 26. Számítsa ki a sorozat első tagját! (3 pont)

Megoldás:

$d = -3$ (1 pont)

$a_{50} = a_1 + 49d$ (1 pont)

$a_1 = \mathbf{176}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa (-2). Adja meg a sorozat első hat tagjának összegét! (2 pont)

Megoldás:

$S_n = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$, ebből: $\mathbf{S_6 = -63}$ (2 pont)

20) Az újkori olimpiai játékok megrendezésére 1896 óta kerül sor, ebben az évben tartották az első (nyári) olimpiát Athénban. Azóta minden negyedik évben tartanak nyári olimpiát, és ezeket sorszámmal látják el. Három nyári olimpiát (az első és a második világháború miatt) nem tartottak meg, de ezek az elmaradt játékok is kaptak sorszámot.

a) Melyik évben tartották a 20. nyári olimpiai játékokat? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy a 2008-ban Pekingben tartott nyári olimpiának mi volt a sorszáma! (2 pont)

A nyári olimpiák szervezőinek egyik fő bevételi forrása a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel. Rendelkezésünkre állnak a következő adatok (millió dollárban számolva):

Olimpia sorszáma	**20.**	**22.**
Bevétel a televíziós jogok értékesítéséből	**75**	**192**

Eszter úgy véli, hogy a televíziós jogok értékesítéséből származó bevételek – a 20. olimpiától kezdve – az egymás utáni nyári olimpiákon egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Marci szerint ugyanezek a számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A saját modelljük alapján mindketten kiszámolják, hogy mennyi lehetett a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel a 27. nyári olimpián. Ezután megkeresik a tényleges adatot, amely egy internetes honlap szerint 1383 (millió dollár).

c) Számítsa ki, hogy Eszter vagy Marci becslése tér el kisebb mértékben a 27. nyári olimpia tényleges adatától! (8 pont)

Megoldás:

a) A nyári olimpiák évszámai egy olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1896, különbsége pedig 4. (1 pont)
$a_{20} = 1896 + 19 \cdot 4 = 1972$ vagyis **1972**-ben tartották a 20. nyári olimpiát.
(1 pont)

b) $1896 + (n-1) \cdot 4 = 2008$, tehát $n =$ **29.** nyári olimpiát tartották 2008-ban.
(2 pont)

c) (A megadott két adatot egy számtani sorozat első, illetve harmadik tagjának tekintve:) $75 + 2d = 192$, amiből $d = 85$ (2 pont)
Így, Eszter becslése a sorozat nyolcadik tagjára:
$75 + 7d = 484{,}5$ (millió dollár) (1 pont)
(A megadott két adatot egy mértani sorozat első illetve harmadik tagjának tekintve:) $75q^2 = 192$, amiből $(q > 0$ miatt$)$ $q = 1{,}6$ (2 pont)
Így Marci becslése a sorozat nyolcadik tagjára: $75q \approx 2013$ (millió dollár)
(1 pont)
$1383 - 485 = 898$ és $2013 - 1383 = 630$, vagyis **Marci becslése tér el kevésbé** a tényleges adattól. (2 pont)

Összesen: 12 pont

21)

a) Egy számtani sorozat első tagja 2, első hét tagjának összege 45,5. Adja meg a sorozat hatodik tagját! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első hét tagjának az összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat differenciáját d-vel jelölve: $45,5=\frac{2\cdot 2+(7-1)d}{2}\cdot 7$ (1 pont)

$13=4+6d$ (1 pont)

$d=1,5$ (1 pont)

$a_6=2+5\cdot 1,5$ (1 pont)

A sorozat 6. tagja **9,5**. (1 pont)

b) A sorozat hányadosát q-val jelölve: $5q+5q^2=10$ (1 pont)

$q_1=-2$; $q_2=1$ (2 pont)

Ha a hányados –2, akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7=5\cdot\frac{(-2)^7-1}{-2-1}=\mathbf{215}$ (2 pont)

Ha a hányados 1, akkor a sorozat tagjai megegyeznek, így ebben az esetben az első hét tag összege $(7\cdot 5)=\mathbf{35}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja és differenciája is 4. Adja meg a sorozat 26. tagját! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{a_{26}=104}$ (2 pont)

23) A $\{b_n\}$ mértani sorozat hányadosa 2, első hat tagjának összege 94,5. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$94,5=b_1\cdot\frac{2^6-1}{2-1}$ (1 pont)

$94,5=b_1\cdot 63$ (1 pont)

$\boldsymbol{b_1=1,5}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy számtani sorozat első tagja 5, második tagja 8.

a) Adja meg a sorozat 80. tagját! **(2 pont)**

b) Tagja-e a fenti sorozatnak a 2005? (Válaszát számítással indokolja!) **(3 pont)**

c) A sorozat első n tagját összeadva az összeg 1550. Határozza meg n értékét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) $a_1 = 5$ és $a_2 = 8$

$d = a_2 - a_1 = 3$ (1 pont)

$a_{80} = a_1 + 79d$

$\boldsymbol{a_{80} = 242}$. (1 pont)

b) Ha 2005 a sorozat n-edik tagja, akkor $2005 = 5 + (n-1) \cdot 3$ (1 pont)

$2000 = (n-1) \cdot 3$ azaz $\frac{2003}{3} = n$ (1 pont)

Mivel $\frac{2003}{3} \notin \mathbb{N}^+$, a **2005 nem tagja a sorozatnak**. (1 pont)

c) Az első n tag összege: $S_n = \frac{5+5+(n-1)\cdot 3}{2} \cdot n = 1550$ (2 pont)

Ebből $(10 + 3n - 3) \cdot n = 3100$, azaz $3n^2 + 7n - 3100 = 0$. (1 pont)

$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 37200}}{6}$

$n_1 = 31$ (1 pont)

$n_2 = \frac{-200}{6}$ (1 pont)

Mivel $n_2 \notin \mathbb{N}^+$, $n_1 = 31$ lehet csak a válasz. (1 pont)

Ellenőrzés: $\frac{10 + 30 \cdot 3}{2} \cdot 31 = 1550$, **tehát 31 tagot kell összeadni**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

25)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! **(5 pont)**

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A sorozat tagjai: 6; 6 + d; 6 + 2d; 1623 (1 pont)

6 + 3d = 1623 (1 pont)

d = 539 (1 pont)

Az első beiktatott szám: 545 (1 pont)

A második beiktatott szám: **1084** (1 pont)

b) A feltételeknek megfelelő számok: 8; 12; 16; …; 1620 (2 pont)
Ezek a számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai (1 pont)

$1620 = 8 + 4 \cdot (n-1)$ (1 pont)

$n = 404$ (1 pont)

$S_n = \frac{8+1620}{2} \cdot 404$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_n = 328856}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy számtani sorozat hatodik tagja 15, kilencedik tagja 0. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat különbségét d-vel jelölve adódik:

$3d = -15$ (1 pont)

amiből $d = -5$. (1 pont)

A sorozat első tagja **40**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m³-ben, illetve m²-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t) = 3000000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) A henger alapkörének sugara $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ (m), (1 pont)

térfogata $V = \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{V \approx 3{,}9 \cdot 10^{-19}\left(\mathrm{m}^3\right)}$. (1 pont)

A henger felszíne:

$A = 2 \cdot \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi + 5 \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{A \approx 3{,}5 \cdot 10^{-12}\left(\mathrm{m}^2\right)}$. (1 pont)

b) A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott, (2 pont)
ezért 1,5 óra után $3000000 \cdot 2^6 =$ (1 pont)
$=$ **192** millió lesz a baktériumok száma. (1 pont)

c) A baktériumok száma x perc múlva lesz 600 millió. Meg kell oldanunk a $3\cdot 2^{\frac{x}{15}}=600$ egyenletet. (2 pont)

$2^{\frac{x}{15}}=200$ (1 pont)

Átalakítva:

$\frac{x}{15}=\log_2 200$ (2 pont)

$x=15\cdot\frac{\lg 200}{\lg 2}$ (1 pont)

amiből $\boldsymbol{x\approx 115}$ adódik, tehát (1 pont)

115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió. (1 pont)

Összesen: 17 pont

28)

a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első *n* tagjának összege 440. Adja meg *n* értékét! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, hányadosa 1,2. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeadni ebben a sorozatban, hogy az összege elérje az 500-at? (7 pont)

Megoldás:

a) A szöveg alapján felírható egyenlet:

$440=\frac{2\cdot 5+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n$. (1 pont)

Ebből $3n^2+7n-880=0$. (2 pont)

A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak **nem** megoldása. (1 pont)

$\boldsymbol{n=16}$ (1 pont)

b) Keressük a következő egyenlet megoldását:

$500=5\cdot\frac{1,2^n-1}{1,2-1}$. (1 pont)

$21=1,2^n$ (2 pont)

(mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve)

$\lg 21=\lg 1,2^n$ (1 pont)

$\lg 21=n\cdot\lg 1,2$ (1 pont)

$\boldsymbol{n\approx 16,7}$ (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább **17** tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 500-at. (1 pont)

Összesen: 12 pont

29) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben 1,5 m^2-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a 27 m^2-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1,5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{1,5}$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) A medence alaplapja egy 2,4 m oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{\text{alaplap}} = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (2 pont)

$\approx 14,96\left(\text{m}^2\right)$ (1 pont)

A medence oldalfalainak összterülete

$T_{\text{oldalfal}} = 6 \cdot 2,4 \cdot 0,4 = 5,76\left(\text{m}^2\right)$. (1 pont)

Így összesen körülbelül **20,7 m^2** felületet burkoltak csempével. (1 pont)

A medence térfogata

$V = T_{\text{alaplap}} \cdot m = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0,4 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{5,986\left(m^3\right)}$. (1 pont)

Körülbelül **5986 liter** víz fér el a medencében. (1 pont)

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3} = 20$ különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg). (2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga). (1 pont)

$3 \cdot \binom{6}{3} = 60$ (1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? (2 pont)

Megoldás:

156000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével. (2 pont)

31) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A felvehető összeg: $700000 \cdot 1{,}06^2$ (2 pont)

ami **786520 Ft.** (1 pont)

b) (Az első évben x %-os volt a kamat.)
Az első év végén a számlán lévő összeg:
$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)$. (2 pont)
A második év végén a felvehető összeg:
$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907200$ (2 pont)
$x^2+203x-1040=0$ (3 pont)
$x_1=5$ (1 pont)
a másik gyök negatív (–208), nem felel meg. (1 pont)
Az első évben 5%-os volt a kamat. (1 pont)
A feladat megoldható mértani sorozat felhasználásával is.

c) Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1{,}04\cdot y$, (1 pont)
két év múlva $1{,}04^2\cdot y=907200$ forint az ár. (1 pont)
$y=\frac{907200}{1{,}04^2}(\approx 838757)$ (1 pont)
Két évvel korábban ≈ **838757** Ft-ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.
Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8 %-kal kamatozik.
a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8 %? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.) (5 pont)
Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.
b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti. (1 pont)
A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke, (1 pont)
ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke
$S_{Csilla}=500000\cdot 1{,}08^{18}=1998009{,}75$-ra változna. (2 pont)
Csilla 18. születésnapján **1998010 Ft**-ot kaphatna. (1 pont)

b) Csongor számláján a p %-os kamat évente

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$-szeres évi növekedést eredményez (1 pont)

18 éven keresztül (1 pont)

A 18. születésnapján Csongor betétjén összesen

$S_{\text{Csongor}} = 400000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 2000000$ Ft van. (2 pont)

Innen

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 5$, vagyis $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = \sqrt[36]{5} \approx 1{,}04572$. (2 pont)

A keresett kamatláb tehát **4,57%.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

33) Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4 %-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben? (4 pont)

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben? (4 pont)

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3 %-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76 %-a? (4 pont)

Megoldás:

a) Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,054. (1 pont)

2003-at követően a 2007-es évvel bezárólag 4 év telik el. (1 pont)

$41{,}9 \cdot 1{,}054^4 \ (\approx 51{,}71)$ (1 pont)

A 2007-es évben kb. **51,7 millió** autót gyártottak. (1 pont)

b) A 2003-at megelőző évekre évenként 1,011-del kell osztani. (1 pont)

1997 után a 2003-as évvel bezárólag 6 év telik el. (1 pont)

$\frac{41{,}9}{1{,}011^6} (\approx 39{,}24 \text{ millió})$ (1 pont)

1997-ben kb. **39,2 millió** autót gyártottak. (1 pont)

c) Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x.
2008 után a 2013-as évvel bezárólag 5 év telik el.
$48,8 \cdot x^5 = 38$, (1 pont)
$x^5 \approx 0,779$ (1 pont)
$x \approx \sqrt[5]{0,779} \, (\approx 0,951)$ (1 pont)
Az évenkénti százalékos csökkenés kb. **4,9 %.** (1 pont)

d) Ha 2013 után y év múlva lesz 76 %-a az éves autószám, akkor $0,97^y \approx 0,76$.
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő. (1 pont)
$y \lg 0,97 = \lg 0,76$ (1 pont)
$y \approx 9,01$ (1 pont)
Kb. 9 év múlva, tehát **2022-ben** csökkenne az évi termelés a 2013-as évinek a 76 %-ára. (1 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.

a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. (4 pont)
Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg!

b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? (8 pont)
Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

<u>Megoldás:</u>

a) A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1,6$ hányadosú mértani sorozat tagjai. (1 pont)
(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1,06^5$ (pont). (1 pont)
$90 \cdot 1,06^5 \approx 120,44$ (1 pont)
tehát 5 év után a vezetési biztonság **120 pontos**. (1 pont)

b) Legyen a csökkenési ráta x. (1 pont)
Ekkor $2,152x^5 = 0,9$ (2 pont)
$x^5 = \dfrac{900}{2152} \, (\approx 0,4182)$, (1 pont)
amiből $x = \sqrt[5]{\dfrac{900}{2152}}$ (1 pont)
$x \approx 0,84$, (1 pont)
$1 - 0,84 = 0,16$, (1 pont)
tehát évente **16 %-kal** csökken az autó értéke. (1 pont)
A feladat megoldható úgy is, ha a kamatos kamatszámításhoz hasonló képletet használunk.

Összesen: 12 pont

35) Egy sejttenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtből állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével?
Számításait részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma (s), (1 pont)

$s = 5000 \cdot 2^4$ (1 pont)

$\boldsymbol{s = 80000}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

$2000 \cdot 1{,}06^x = 4024$. (1 pont)

x kiszámítása.

$\lg 2000 + x \lg 1{,}06 = \lg 4024$

$x = \dfrac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}998$. (2 pont)

12 teljes év alatt. (1 pont)

Összesen: 4 pont

37) Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4.

a) Adja meg a sorozat első 25 tagjának összegét! (2 pont)

b) Számítsa ki az n értékét és a sorozat n-edik tagját, ha az első n tag összege 408. (8 pont)

Egy mértani sorozat első tagja 10^{25}, hányadosa $0{,}01$.

c) Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 100 000? (7 pont)

Megoldás:

a) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$S_{25} = \dfrac{2 \cdot 56 + 24 \cdot (-4)}{2} \cdot 25 =$ (1 pont)

$= \mathbf{200}$ (1 pont)

b) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$408 = \dfrac{2 \cdot 56 + (n-1) \cdot (-4)}{2} \cdot n$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve: $816 = 112n - 4n^2 + 4n$. (2 pont)

A másodfokú egyenlet: $4n^2 - 116n + 816 = 0$, (1 pont)

ennek gyökei, vagyis n lehetséges értékei: 12 és 17. (2 pont)

Ha $n = 12$, akkor $a_{12} = 56 + 11 \cdot (-4) = \mathbf{12}$. (1 pont)

Ha $n = 17$, akkor $a_{17} = 56 + 16 \cdot (-4) = \mathbf{-8}$. (1 pont)

c) A mértani sorozat n-edik tagjának kiszámítására vonatkozó képlet alapján:
$100000 = 10^{25} \cdot 0{,}01^{n-1}$. (1 pont)
Ebből $10^5 = 10^{25} \cdot \left(10^{-2}\right)^{n-1}$. (2 pont)
A hatványozás azonosságainak felhasználásával: $10^{-20} = 10^{-2n+2}$. (2 pont)
Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $-20 = -2n + 2$. (1 pont)
$\boldsymbol{n = 11}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsa ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével! (2 pont)

Megoldás:

$\mathbf{6 \cdot 10^3 = 6000}$ (2 pont)

39) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

Megoldás:

a) Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1, (1 pont)
differenciája pedig 200. (1 pont)
A sorozat első 18 tagjának összege:
$\frac{2a_1 + 17 \cdot 200}{2} \cdot 18 = 90000$, (2 pont)
amiből $a_1 = 3300$. (1 pont)
A 18. tag $3300 + 17 \cdot 200 = 6700$. (1 pont)
Így az első alkalommal **3300 Ft-ot**, az utolsó alkalommal **6700 Ft-ot** tettek félre. (1 pont)

b) Zsuzsa fiatalabb testvérének életkorát jelölje x, ekkor másik testvére $x + 7$ éves.
A feladat szövege alapján: $\sqrt{(x+7) \cdot x} = 12$. (1 pont)
Ebből $x^2 + 7x - 144 = 0$, (1 pont)
amiből vagy $x = -16$, de ez az érték nem megoldása a feladatnak. (1 pont)
vagy $x = 9$. (1 pont)
Zsuzsa egyik testvére **9**, a másik **16** éves. (1 pont)

Összesen: 12 pont