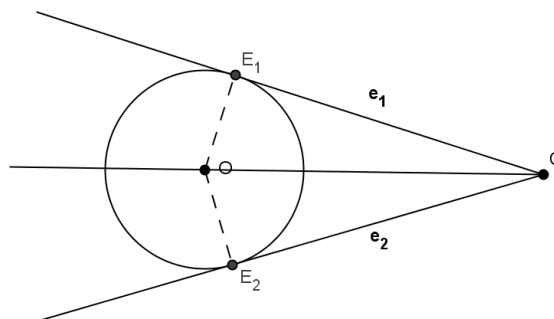
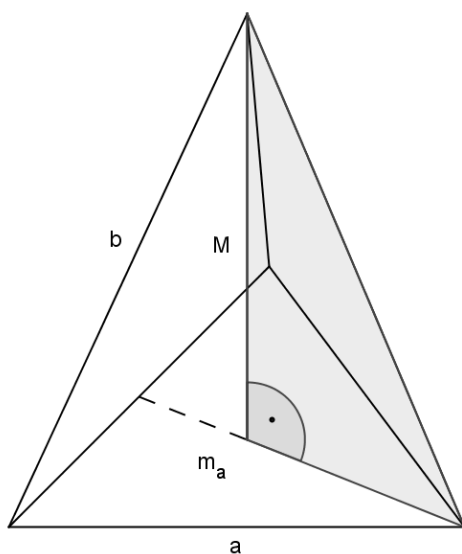


Harmadik epochafüzet

Matematika 9. évfolyam

Tulajdonos:

.....



Tartalomjegyzék

Kurzus leírás	2
Alapfogalmak	3
Szögszámítás, nevezetes szögpárok	5
A háromszög.....	8
Összefüggések a háromszög szögei között.....	8
Összefüggések a háromszögek oldalai között	9
Speciális háromszögek	14
Négyszögek, területszámítás	15
Kör és részei	18
Térgeometriai számítások.....	19
A hasáb és a henger	19
A gúla és a kúp	22
Geometriai transzformációk, egybevágóság.....	26
A háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei.....	31
Thalész tétele, érintőnéyszögek.....	35
Szerkesztések.....	37
Feladatgyűjtemény	38
Számítások (szögek, kerület, terület).....	44
Körökkel kapcsolatos feladatok	45
Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, szerkesztések.....	45
Gyakorló feladatok az epochazáróra	46
Számítások (szögek, kerület, terület).....	46
Körökkel kapcsolatos feladatok	47
Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, szerkesztések.....	48
Térgeometriai számítások.....	48
Elméleti ismeretek	50

Kurzus leírás

Geometria – Szögszámítás, sokszögek és szabályos sokszögek szögei és átlói, háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, nevezetes derékszögű háromszögek ($60^\circ - 30^\circ$; 45°), nevezetes négyszögek (paralelogramma, trapéz, rombusz, téglalap, deltoid, négyzet) tulajdonságai, kör és részei, Thalesz-tétel, hasáb, henger, gúla, kúp felszíne és térfogata

Fogalmak: háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, látószög, körív, körcikk, körszelet, gúla, kúp

Összefüggések: átlók számának és belső/külső szögek összegének számolása, speciális derékszögű háromszögek ($60^\circ - 30^\circ$; 45°) oldalai, középvonallal és súlyvonallal kapcsolatos tételek, Thalesz-tétel, gúla és kúp adatai közötti összefüggések

Eljárások: háromszög szerkesztések, Thalesz-tétel felhasználása háromszög szerkesztési feladatokban, körív hossza, körcikk és körszelet területének kiszámítása, térfogat és felszín kiszámítása

Az epocha értékelése:

- Az epocha alatt két részteszt lesz, melyek az eredménybe **15-15 %**-ban számítanak
- Az epochát egy epochazáróval zárjuk, ez a végeredményben **70%**-ban számít bele.
- További **5 %**-ot ér az órai aktivitás illetve a csoportban való együttműködés.

Tehát ebben az epochában **105%** a maximálisan elérhető teljesítmény

Alapfogalmak

1. **Hány** részre bontja az egyenest
 - a. egy pontja;
 - b. két különböző pontja;
 - c. három különböző pontja;
 - d. n különböző pontja;

Hány szakasz, és hány félegyenes keletkezik az egyes esetekben?

2. **Hány pontot** adtunk meg az egyenesen, ha ezek a pontok úgy osztják fel az egyenest, hogy a részek között
 - a. 5;
 - b. 9;
 - c. 20;
 - d. n
 olyan szakasz található, amelyeknek legfeljebb a végpontjuk közös?
3. **Hány pontot** adtunk meg az egyenesen, ha ezek
 - a. 1;
 - b. 3;
 - c. 6;
 - d. 15;
 - e. 55
 szakaszt határoznak meg? (A fenti szakaszok az összes lehetséges szakasz számát adják meg.)
4. A , B , C és D ebben a sorrendben egy egyenes pontjai. **Töltsd ki** a táblázat hiányzó helyeit!

AB	BC	CD	AC	BD	AD
3 m	5 m	8 m			
4 dm		1 dm	6 dm		
	1 cm		3 cm	7 cm	
			11 km	13 km	18 km
	2 mm	2 cm			0,33 dm

5. **Hány egyenest** határoz meg a síkban
 - a. 2;
 - b. 5;
 - c. 7;
 - d. 10;
 - e. n
 olyan pont, amelyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre? Készíts táblázatot, és fogalmazd meg a sejtésed!
6. **Hány metszéspontot** határoz meg a síkon
 - a. 2;
 - b. 4;
 - c. 6;
 - d. 10;
 - e. n
 egyenes, ha semelyik kettő sem párhuzamos, és nincs a síkon olyan pont, melyen kettőnél több egyenes menne át?

7. **Hány részre** bontja a síkot egy egyenes, két illetve három különböző egyenese?
(Rajzolj!)

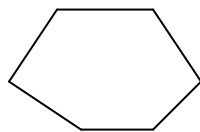
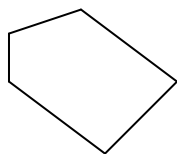
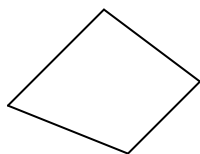
8. Legalább és legfeljebb **hány részre** bonthatja a síkot négy különböző egyenese?
(Rajzolj!)

9. **Foglaljuk** táblázatba, hogy hány részre bontja a síkot 1, 2, 3, 4, 5, 6 különböző egyenese, ha ezek közt nincs két olyan, amelyik párhuzamos egymással, és semelyik három sem megy át egy ponton! Tapasztalsz-e valamiféle szabályosságot a síkrészek számának növekedésében?

Egyenesek száma	1	2	3	4	5	6	...	n	...	
Síkrészek száma										

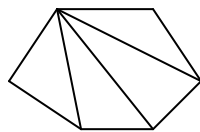
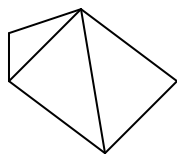
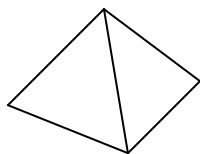
10. **Hány részre** bontja a teret egy, kettő illetve három síkja?

11. Összesen **hány átlót** húzhatunk az egyes konvex sokszögekbe?
négyyszög: ötszög: hatszög: és egy n -szögbe?



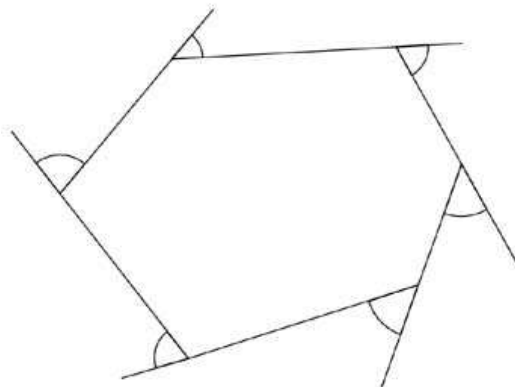
Indokolj!

12. Mennyi a belső szögek összege a következő konvex sokszögben?
négyyszög: ötszög: hatszög: és egy n -szögbe?



Indokolj!

13. Mennyi a külső szögek összege az előbbi konvex sokszögben?



Azokat a konvex sokszögeket, amelyeknek minden szöge és oldala egyenlő, *szabályos sokszögeknek* nevezzük. A szabályos sokszög egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy kör írható köré is (azaz olyan kör, amely a sokszög minden csúcsán áthalad), és bele is (azaz olyan kör, amelynek a sokszög minden oldalegyenese az érintője).

14. **Egészítsd ki** a táblázatot a szabályos sokszögek hiányzó adataival!

	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.
csúcsok száma	6	10	n					
belső szög				150°	160°			
külső szög						40°		α°
belső szögek összege							540°	

Szögszámítás, nevezetes szögpárok

15. **Add meg** a következő nevezetes szögpárok meghatározását, és **rajzolj** példákat is hozzájuk!

a. Egyállású szögek:

b. Fordított állású szögek:

c. Csúcsszögek:

d. Váltószögek:

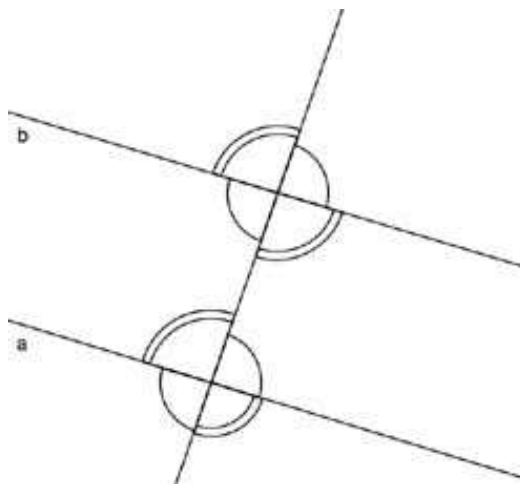
e. Mellékszögek:

f. Kiegészítő szögek:

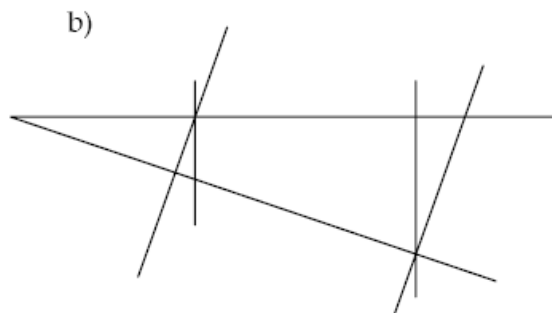
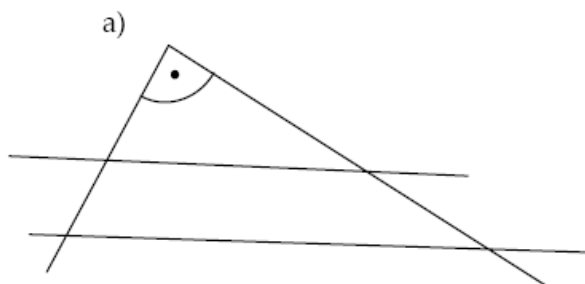
g. Pótszögek:

16. Az ábrán látható a és b egyenesek párhuzamosak. Add meg az ívekkel jelölt szögek nagyságát, ha tudjuk, hogy az α szög nagysága

a. 30° ; b. 48° ;
c. $53,2^\circ$; d. $60^\circ 11'$!



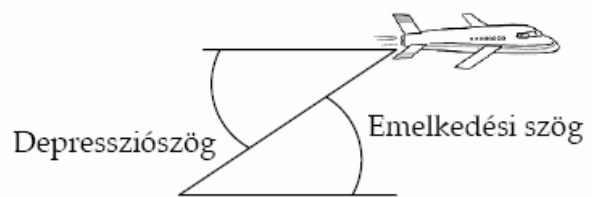
17. Keress egyenlő és egymást kiegészítő szögpárokat a következő ábrákon!



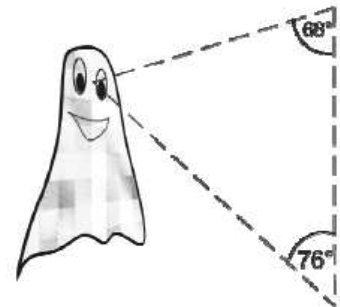
18. Egy közös szárral rendelkező két szög aránya $2 : 7$. Az egyik szög 100° -kal nagyobb, mint a másik. Mekkora a két szög összege?
19. α és β egy közös szárral rendelkező két szög. Összegük 250° . és tudjuk, hogy az α szög β -val nem közös szögszárának meghosszabbítása a β szöget
a. $1 : 2$; b. $1 : 3$; c. $2 : 3$
arányban osztja két részre. Mekkora a két szög?
20. Adott, hogy egy szög mennyivel kisebb a mellékszögénél. Számítsd ki a szöget és a mellékszögét!
a. 100° b. 20° c. 200° d. 75° e. $23,8^\circ$ f. $1,2^\circ$

21. Egy szög és a mellékszögének aránya adott. Határozd meg a szöget és a mellékszöget!
 a. $3 : 5$; b. $7 : 11$; c. $5 : 7$; d. $1 : 5$; e. $1 : 3$
22. Adott, hogy egy szög a pótszögének hány százaléka. Határozd meg a szöget!
 a. 25%; b. 150%; c. 12% d. 48%
23. Egy hajó elindul észak felé, majd 30 fokot keletnek fordul. Ettől az iránytól balra fordul 120 fokot. Ezek után haladásának iránya az eredeti iránnyal hány fokos szöget zár be?
24. Egy repülőgép nyugati irányban hagyja el a repülőteret, majd északnyugati irányba fordul. Másfél óra repülés után elfordul -45° -kal, majd félórányi repülés után $+60^\circ$ -kal. Az eredeti (nyugati) irányhoz képest milyen irányba halad ekkor?

A vízszinteshez képest általában lefelé vagy felfelé látjuk a tárgyakat. Ha lefelé nézünk, akkor a vízszintessel bezárt (lefelé irányuló) szöget **depressziószögnek** hívják. **Emelkedési szögnek** nevezzük a vízszintessel bezárt, felfelé irányuló szöget. Tehát a terem tetejét emelkedési, alját depressziószögben látjuk.



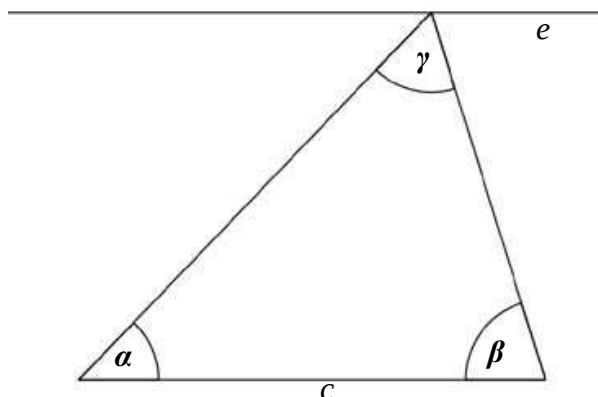
25. Egy repülő a ház ablakából 35° -os emelkedési szög alatt látszik. Mekkora depressziószög alatt látszik a repülőből az ablak?
26. Szellemőke a tükörben nézegeti magát. Mekkora depressziószögben látja a tükör alját, és mekkora emelkedési szögben a tetejét?
27. Egy torony lábától a szomszéd ház tetejét 30° -os emelkedési szögben látjuk. A torony alját tetejét a ház tetejéről 76° -os szögben látjuk. Mekkora emelkedési szögben látjuk a torony tetejét, és mekkora depressziószögben az alját? Készíts ábrát a megoldáshoz!



A háromszög

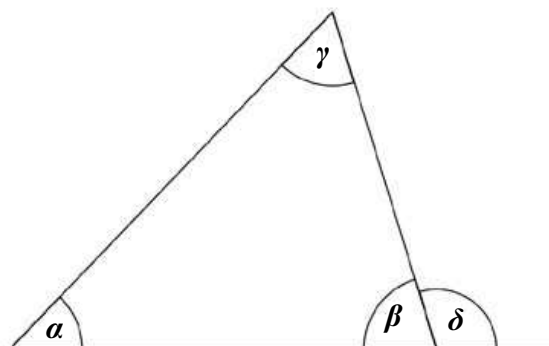
Összefüggések a háromszög szögei között

28. e és c párhuzamosak egymással. α , β és γ a háromszög belső szögei. **Bizonyítsuk be** az ábra segítségével, hogy **a háromszög belső szögeinek összege 180°** .



29. **Milyen kapcsolat** van a háromszög egyik külső szöge (δ) és a nem mellette fekvő belső szögek (α és γ) közt?

Bizonyítsuk be az állítást!



30. Egy háromszög egyik belső szöge 38° . A másik két belső szög közül az egyik 22° -kal nagyobb a másikonál. **Mekkora** a háromszög belső és külső szögei?

31. Egy háromszögben a belső szögek aránya

a. $1 : 2 : 3$;

b. $4 : 5 : 6$;

c. $3 : 7 : 10$;

d. $2 : 9 : 13$;

e. $7 : 10 : 19$;

f. $11 : 12 : 13$.

Határozd meg a háromszög belső és külső szögeit!

32. Jelölje egy háromszög belső szögeit α , β és γ , és megfelelő külső szögeit α' , β' és γ' . A következő adatok alapján **határozd meg** a háromszög hiányzó belső és külső szögeit!

a. $\alpha = 35^\circ$ és $\beta = 80^\circ$;

b. $\alpha = 56^\circ$ és $\beta' = 113^\circ$;

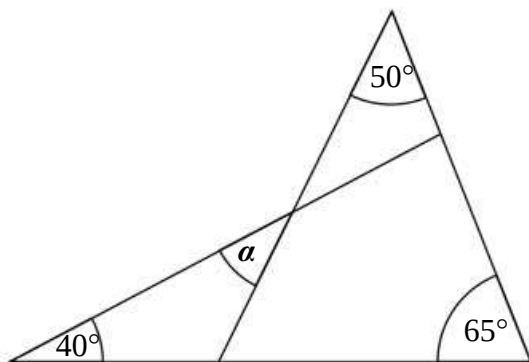
c. $\alpha' = 95^\circ$ és $\gamma = 50^\circ$;

d. $\beta' = 82^\circ$ és $\gamma' = 142^\circ$;

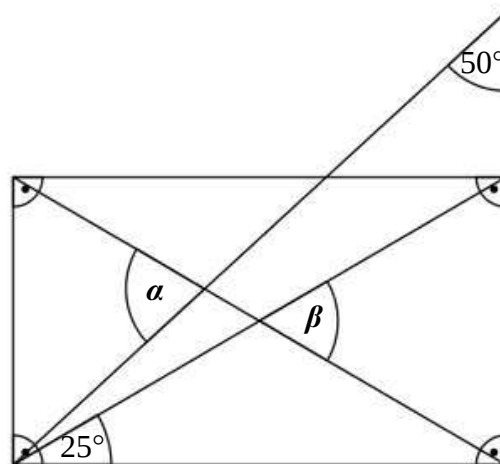
e. $\alpha' = 190^\circ$ és $\beta = 30^\circ$;

f. $\alpha' = 92^\circ$ és $\gamma' = 25^\circ$.

33. Egy háromszög egyik külső szöge 110° -os, az egyik belső szöge 45° -os. **Mekkorák** az ismeretlen belső és külső szögei?
34. **Mekkorák** a háromszög szögei, ha adott két külső szöge?
 a. 130° és 174° ; b. 87° és 116° ; c. 136° és 98° .
35. Adott egy háromszög egyik szöge és a másik két külső szög aránya. **Számítsd ki** a hiányzó szögeket!
 a. 70° és $2 : 3$; b. 30° , $8 : 13$.
36. Egy háromszög szögfelezője a szemközti oldallal 78° -os, egy másik szögfelezővel 48° -os szöget zár be. **Mekkorák** a háromszög szögei?
37. Egy háromszögben az egyik szög 75° . **Mekkora szöget zár be** egymással a másik két belső szög szögfelezője?
38. Egy háromszögben a legnagyobb szög a másik két szög összegének kétszerese. A két kisebb szög aránya $2 : 3$. **Mekkorák** a háromszög szögei?
39. Egy szimmetrikus háromszög egyik szöge 100° . **Mekkorák** az ismeretlen belső és külső szögei?
40. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének négyszerese a mellette fekvő külső szög. **Mekkorák** a háromszög belső és külső szögei?
41. **Számítsd ki**, hány fokok az ábrákon betűvel jelölt szögek!



$\alpha =$



$\alpha =$

$\beta =$

Összefüggések a háromszögek oldalai között

42. **Szerkesszünk** háromszöget, ha oldalai
 a. 1,5; 2; 2,5 (cm)
 b. 1,6; 1,4; 3 (cm)
 c. 1; 1,5; 3 (cm)
Mit tapasztalunk?

43. Egy háromszög oldalai a , b és c . **Tegyük ki** a megfelelő relációs jeleket!

$$a + b \dots c$$

$$a + c \dots b$$

$$b + c \dots a$$

44. Lehet-e „bármilyen rövid” a háromszög egy oldala? Ismét **tegyük ki** a megfelelő relációs jeleket!

$$a \dots c - b$$

$$c \dots b - a$$

$$b \dots a - c$$

Fogalmazzuk meg szóban is a kapott összefüggéseket!

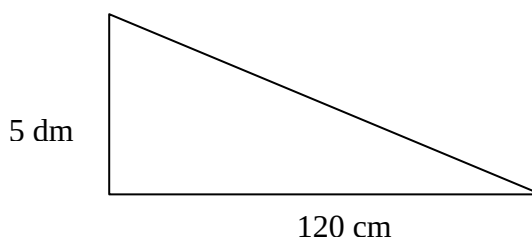
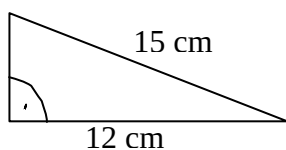
Egy háromszögben bármely két oldal

Egy háromszögben bármely két oldal

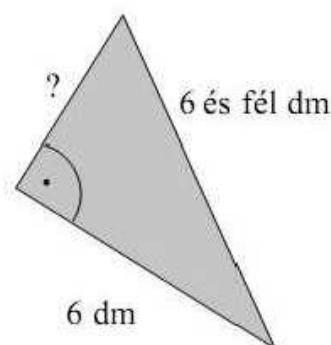
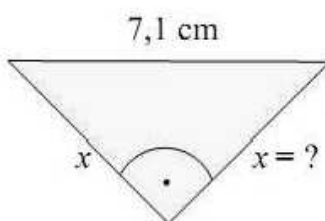
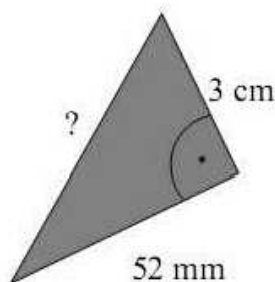
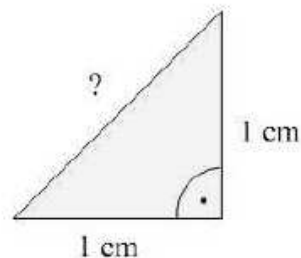
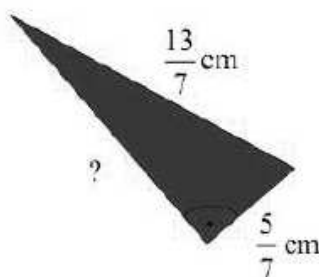
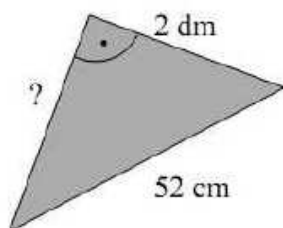
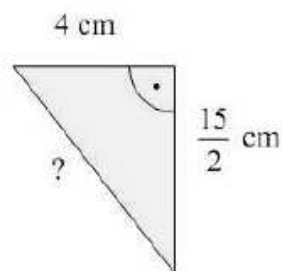
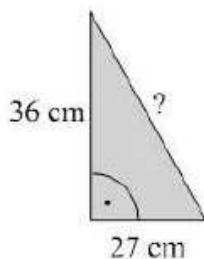
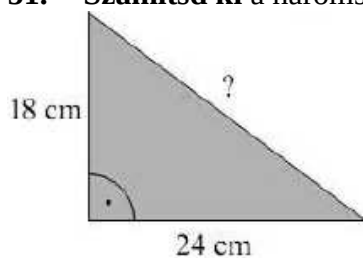
45. Az ABC háromszög két oldala 5 és 10 cm. **Mekkora lehet** a harmadik oldala?
46. Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. A legnagyobb oldala 6 cm, a másik két oldal különbsége 2 cm. **Mekkorák** a háromszög oldalai?
47. **Van-e** olyan háromszög, melyben az oldalak aránya 2 : 3 : 5?
48. Egy háromszögben $a = 1,8$ cm, $b = 0,7$ cm. **Mekkora a** c oldal, ha tudjuk, hogy c egész szám?
 $c =$

49. **Fogalmazd meg** szövegben a Pitagorasz-tételt! Készíts ábrát!

50. **Számold ki** a háromszögek hiányzó oldalát!



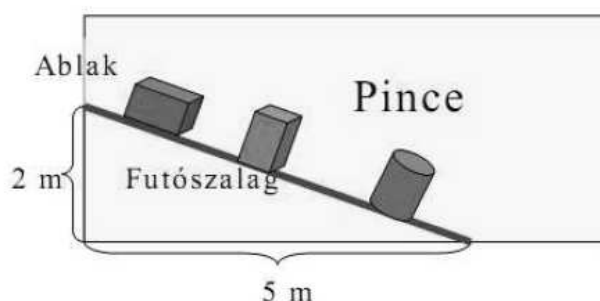
51. Számítsd ki a háromszögek ismeretlen oldalának hosszát!



52. Egy (egytágú) létra a falnak van támasztva. A hossza 2,6 méter, a létra aljának a faltól való távolsága 1 méter. Hány méter magasra visz fel a létra, ha felmászunk rajta?

53. Az egerészölyv egy magas mezsei juharfa tetején lesett a mezőn eszegető kis pocokra. Mikor lecsapott rá, pontosan 51 métert kellett repülnie. Ekkor a szerencsétlen jószág épp 45 méter távolságra volt a fától. **Milyen magas** a juharfa?

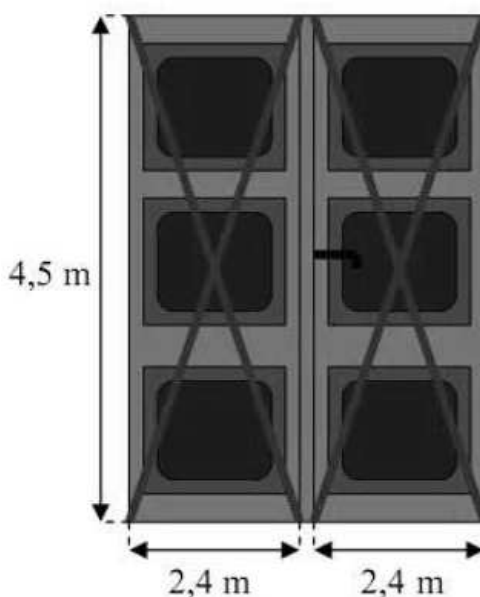
54. Egy csemegebolt pincéjébe egy futószalagot tettek az ablakon át a földig a könnyebb rakodás érdekében. **Milyen hosszú** a futószalag, ha 2 méter melyre szállítja az árukat, es alsó része (ahol leveszik az árut) az ablaktól 5 méterre helyezkedik el (egy tizedes jegy pontossággal számolj!)



55. Egy kétágú létra ágának hossza 2,5 méter. **Milyen magasra** lehet rajta mászni, ha a két ágát egymástól 1,4 méterre tudjuk kinyitni? (Feltételezzük, hogy a létra legtetejére lehet mászni.)

56. **Mekkora távolságra** vannak egymástól a derékszögű koordináta-rendszer $A(14; 7)$ és $B(2; -9)$ pontjai?

57. Egy régi nagy fakapu tönkrement, ezért mindkét szárnyát két keresztpánttal meg akarják erősíteni (átlósan). **Milyen hosszú** vaslemez kell ehhez a művelethez (a vaslemez vastagságától, szélességétől eltekintünk)? (Adatok az ábrán láthatók.)



58. Az egyenletesen emelkedő hegyre vezető út hossza 1553 m. **Hány méter** magasra visz fel, ha másfél km hosszúnak jelöli a térkép? (Kerekíts egészre!) 24.

59. **Mekkora** annak a téglalapnak az átlója, melynek oldalai 3,2 cm és 6 cm. **Szerkeszd meg** a téglalapot, és számolásod **ellenőrizd** méréssel!

60. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója 16 dm. **Mekkora** a két befogó?

61. **Mekkora** annak a rombusznak a hosszabb átlója, melynek oldala 5 dm, rövidebb átlója 6 dm?

62. **Mekkora** annak a deltoidnak a szimmetriaátlója, melynek másik átlója 16 cm, oldalai 10 és 17 cm hosszúak.

63. **Mekkora** az oldala a 25 cm hosszú átlójú, 20 cm oldalhosszúságú téglalapnak?

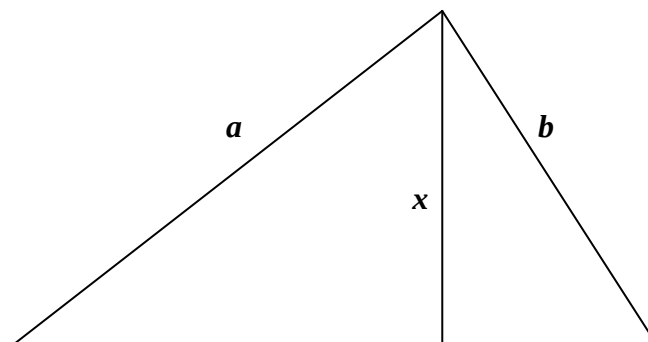
64. **Milyen hosszú** a 8,5 cm sugarú körben a középponttól 7,5 cm távolságba húzott húr?

65. Egy szabályos háromszög oldala 2 dm. **Mekkora** a háromszög magassága?

66. **Számítsd ki** annak a derékszögű háromszögnek a magasságát, melynek befogói 6 cm és 8 cm!

67. Peti papírsárkányt készít, melynek két szimmetrikusan elhelyezkedő csúcsánál derékszög van. A sárkány deltoid alakú, és a két oldala 90 cm és 1,2 m hosszú. **Számítsd ki**, hogy hány cm-es nád rudakra van szüksége a vázhoz!

68. A rajzon egy nyeregtető keresztmetszetét látod. A tető a -val és b -vel jelzett oldala 6 m és 4 m hosszúságú, és derékszöget zárnak be. **Milyen hosszú** az ábrán x -szel jelzett tartógerenda?



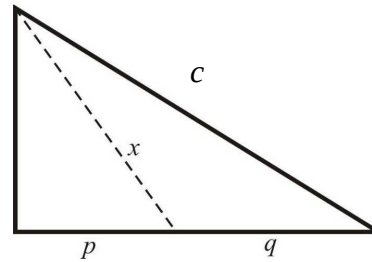
69. Egy 6 egység sugarú félkörbe írjunk olyan derékszögű háromszöget, melynek átfogója a félkör átmérője és befogóinak aránya 3:4. **Mekkora** a háromszög területe?

70. **Mekkora** az x -szel jelölt szakasz?

a. $p = 1 \text{ dm}, q = 14 \text{ cm}, c = 2,5 \text{ dm};$

b. $p = 6 \text{ cm}, q = 0,09 \text{ m}, c = 1,7 \text{ dm};$

c. $p = 0,23 \text{ m}, q = 3,7 \text{ dm}, c = 61 \text{ cm}.$



71. A televíziózásban kétféle képoldal-arány terjedt el: a hagyományos 3 : 4 és a szélesvásznú 16 : 9. Számítsd ki, hogy **mekkorák a kép oldalai** mindkét esetben, ha a képátló

a. 77 cm;

b. 55 cm;

c. 110 cm?

72. **Határozd meg** a 10 cm oldalú szabályos háromszög köré- és beleírható körének sugarát!

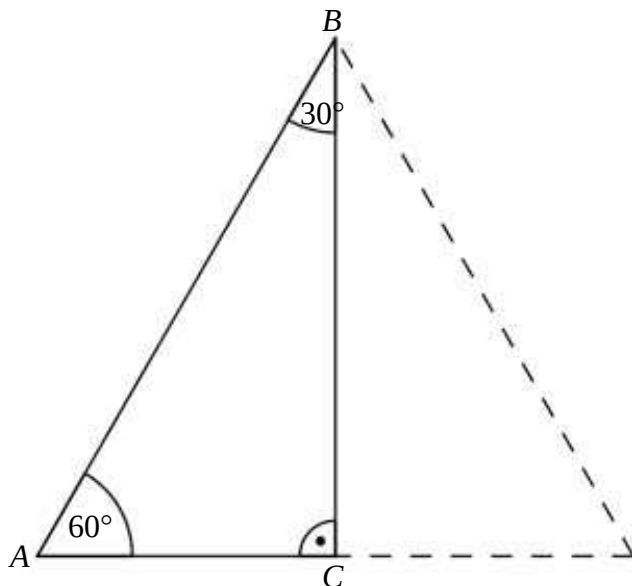
73. **Mekkora** a háromszög a oldala, ha $b = 5 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm}$, és $m_a = 4 \text{ cm}$?

74. Egy egyenlőszárú háromszög alapja 6 cm, szára 5 cm hosszú. **Számítsd ki** a kerületét és a területét!

Speciális háromszögek

75. **Milyen összefüggés** van a derékszögű háromszög rövidebb befogója és az átfogója között, ha a hegyesszögei 30° és 60° ?

Segítség: ha tükrözzük a háromszöget a hosszabbik befogójára, akkor egy nevezetes háromszöget kapunk.



76. **Milyen összefüggés** van az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói és átfogója között? **Készíts ábrát!**

77. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30° , rövidebbik befogója 4 cm. **Mekkora** a másik befogója és az átfogója?
78. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 60° , hosszabbik befogója 7,2 cm. **Mekkora** a másik befogója és az átfogója?
79. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge fele akkora, mint a másik hegyesszöge. **Mekkorák** a befogói, ha átfogója 10 cm?
80. Egy háromszög belső szögeinek aránya $1 : 2 : 3$. **Mekkorák** az oldali, ha a leghosszabb oldala 12 cm?
81. **Mekkora** a területe annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, melynek átfogója 12 cm?
82. **Határozd meg** a területét annak a háromszögnek, melyben a szögek aránya $1 : 1 : 2$, és a legrövidebb oldala 8 cm!

Négyszögek, területszámítás

83. Írd a négyszögek betűjelét a megfelelő négyszöghöz!

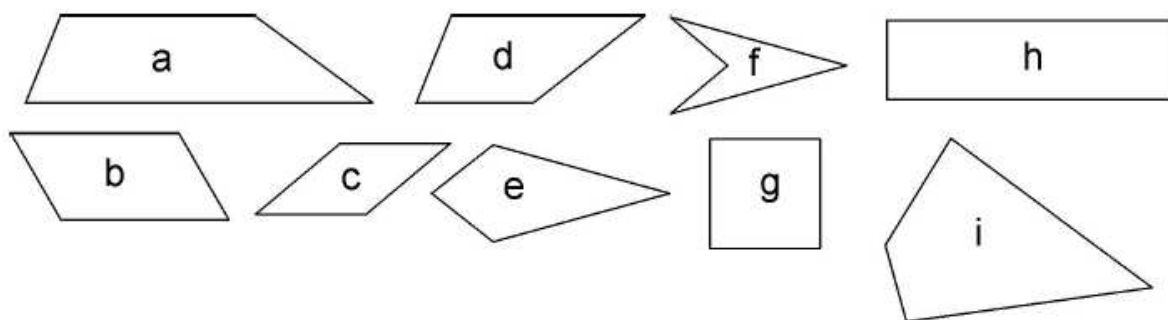
Deltoid:.....

Trapéz:.....

Paralelogramma:

Rombusz:

Téglalap:.....

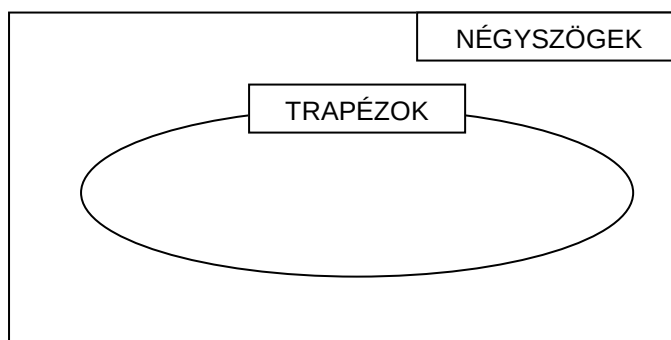


84. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!
- Van olyan trapéz, melynek pontosan egy derékszöge van.
 - van olyan paralelogramma, amelynek van derékszöge.
 - Ha egy paralelogrammának van derékszöge, akkor az téglalap.
 - Van olyan téglalap, amelyik rombusz.
 - Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet.
85. Egy trapéz egyik alapján fekvő két szöge 62° , illetve 46° . **Számítsd ki** a trapéz másik két szögét!
86. **Mekkorák** a trapéz hiányzó szögei, ha két szemközti szöge
- 70° és 100° ;
 - 30° és 120° ;
 - 40° és 90° ?
87. A rombusz egyik szöge 42° -os. **Mekkora szöget** zárnak be az átlók az oldalakkal?
88. A téglalap oldala és az átló 21° -os szöget zárnak be. **Mekkora** a két átló által bezárt szög?
89. Egy téglalapban az átlók 50° -os szöget zárnak be egymással. **Mekkorák** az átló és az oldalak hajlásszögei?
90. Egy deltoidban a két szemközti szög 36° és 138° . **Mekkora** a többi szög, és **mekkora szögeket** zárnak be az átlók az oldalakkal?
91. Egy rombusz egyik oldalán fekvő szögeinek aránya $4 : 5$. **Mekkora szöget** zárnak be az átlói az oldalakkal?
92. Egy deltoid két szögének nagysága 110° és 44° . **Számítsd ki** a deltoid másik két szögét! (Hány eset van?)

93. Készíts táblázatot a tanult sokszögekről (háromszög, négyzet, rombusz, téglalap, paralelogramma, trapéz, deltoid) Írd le a definíciójukat, tulajdonságaikat, és a kerületük, illetve a területük kiszámításának a módját!

Megnevezés	Ábra	Definíció	Tulajdonságok	Kerület és terület
háromszög				
négyzet				
rombusz				
téglalap				
paralelogramma				
trapéz				
deltoid				

94. Egy egyenlő szárú háromszög szára 75 mm, alapja 90 mm. **Hány cm^2** a területe?
95. Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 6 cm és 12 cm, a szárai 8 cm hosszúak. **Mekkora** a trapéz területe?
96. **Mekkora** a paralelogramma kerülete és területe, ha két oldala 3 cm és 4 cm, és a 3 cm-es oldalhoz tartozó magassága 3,5 cm?
97. **Mekkora** a háromszög területe, ha egyik oldala 5 cm és a hozzátartozó magasság 2,4 cm?
98. **Mekkora** a deltoid területe, ha átlói 7 cm és 4 cm.
99. **Számítsd ki** a rombusz kerületét és területét, ha oldala 8 cm és magassága 6 cm!
100. **Határozd meg** a négyzet kerületét és területét, ha átlóinak hossza 12 cm!
101. Egy téglalap egyik oldala 24 cm, átlója 26 cm.
a. Mekkora a területe?
b. Mekkora a vele azonos területű négyzet oldala?
102. A szimmetrikus trapéz alapjai 4 cm és 7 cm, szárai 4,6 cm hosszúak. **Mekkora** a trapéz területe és átlója?
103. Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 8 és 4 cm, szárai 6 cm hosszúak. **Mekkora** a területe?
104. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 12 cm, szárai 4 cm-esek. A szárak az egyik alappal 30° -os szöget zárnak be. **Határozd meg** a területét!
105. Trapéz hosszabbik alapja 10 cm, egyik szára 4 cm, ez 45° -os szöget zár be az alappal, másik szára 6 cm. **Mekkora** a trapéz területe?
106. Trapéz párhuzamos oldalai 5 cm és 2,5 cm, szárai 3 cm és 3,5 cm. **Határozd meg** a területét!
107. Szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 44 cm, szára 17 cm és átlója 39 cm. **Mekkora** a területe?
108. **Igazold**, hogy a trapézt az átlói 4 olyan háromszögre bontják, melyek közül kettőnek a területe azonos.
109. **Egészítsd ki** a Venn-diagrammot a paralelogrammák, a rombuszok, a deltoidok, a téglalapok és a négyzetek halmazával!



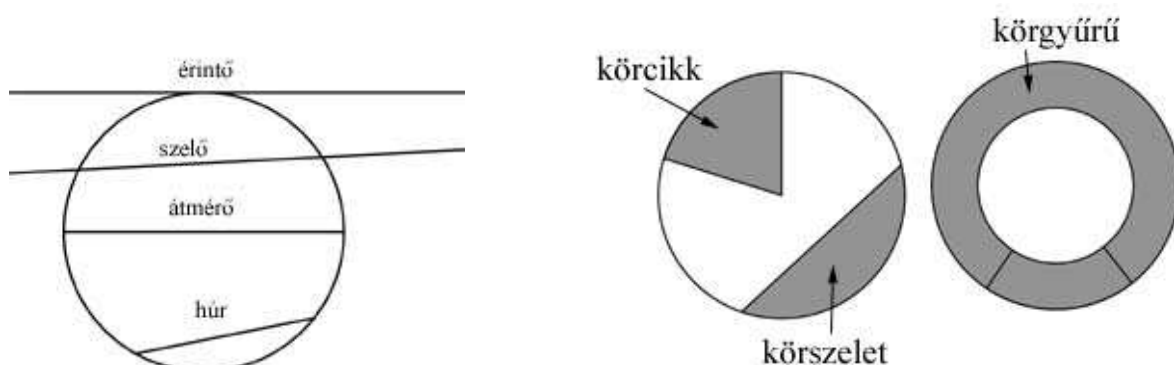
110. Igaz vagy hamis?

- Minden paralelogramma trapéz.
- Ha egy négyszögben két oldal párhuzamos, a másik kettő pedig egyenlő, akkor az paralelogramma.
- Van olyan trapéz, ami egyenlőszárú, de tengelyesen nem szimmetrikus.
- Ha egy paralelogramma deltoid, akkor az négyzet.
- Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.
- Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet is.

Kör és részei

A kör azon pontok halmaza a síkon, melyek a sík egy adott **O** pontjától egy adott **r** távolságra vannak. Az **O** pont a kört középpontja, **r** pedig a sugara.

A kör kerülete : $k = 2r\pi$, területe $t = r^2\pi$, ahol a $\pi \approx 3,14$

A kör részei

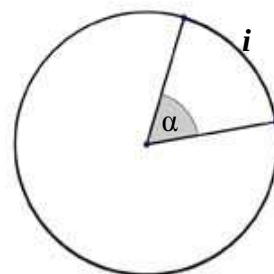
Az **érintő** olyan egyenes, melynek pontosan egy közös pontja van a körrel. A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

A **szelő** olyan egyenes, melynek két közös pontja van a körrel.

Ha egy kör egyik ívének két végpontját összekötjük a kör középpontjával, így egy **középponti szög** keletkezik.

A körív hossza és a hozzá tartozó körcikk területe a középponti szög ismeretében megadható:

$$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\pi \text{ és } t = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi \quad \text{ahol } r \text{ a kör sugara.}$$

**111. Határozd meg a 10 cm sugarú kör**

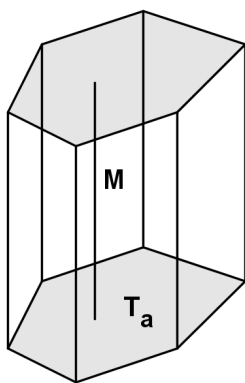
- átmérőjét;
- kerületét;
- területét;
- a kör középpontjától 3 cm-re haladó húrok hosszát!

112. **Mekkora** a kör területe, ha kerülete $23,4 \text{ cm}$?
113. **Mekkora** a kör sugara és kerülete, ha a területe 124 cm^2 ?
114. **Mekkora** a körgyűrű területe, ha a külső körének sugara 12 cm , a belső körének sugara $7,5 \text{ cm}$?
115. Egy körgyűrű területe $43,8 \text{ cm}^2$, középkörének sugara 8 cm . **Határozd meg** a szélességét, és a külsőkörének sugarát!
116. Egy körgyűrű középkörének kerülete 12 m , szélessége 2 m . **Mekkora** a területe?
117. Egy kör sugara 6 cm . **Számítsd ki** ebben a körben a 120° -os középponti szöghöz tartozó körcikk területét és ívhosszát!
118. **Határozd meg** a körcikk területét, ha a kör sugara 10 cm , és középponti szöge
 a. 45° ; b. 60° ; c. 90° ; d. $43,2^\circ$!
119. **Számítsd ki** a 2 cm sugarú körben a 2 cm hosszúságú ívhez tartozó középponti szöget!
120. **Határozd meg** a körszelet területét, ha húrja 8 cm , és középponti szöge
 a. 60° b. 90° c. 120°
121. Vegyük fel egymástól 6 cm távolságra az **A** és **B** pontokat, és szerkesszünk körjüket 2 cm sugarú köröket. Szerkessz olyan 3 cm sugarú kört, mely érinti ezeket!
122. Egy 3 cm sugarú körhöz egy külső **P** pontból érintőt húzunk. A **P** pont a középpontjától 11 cm -re van.
 a. **Milyen messze** van a **P** pont a körtől?
 b. **Milyen hosszúak** az érintési szakaszok?

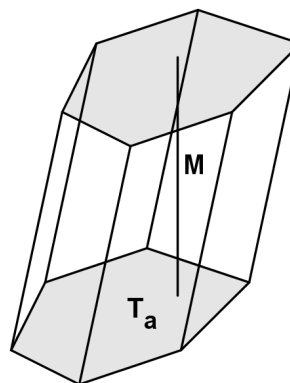
Térgeometriai számítások

A hasáb és a henger

A **hasáb** két alaplappja egymással párhuzamos síkban lévő két egybevágó sokszög, melynek oldalélei párhuzamosak. A hasáb oldallapjai paralelogrammák. Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok.



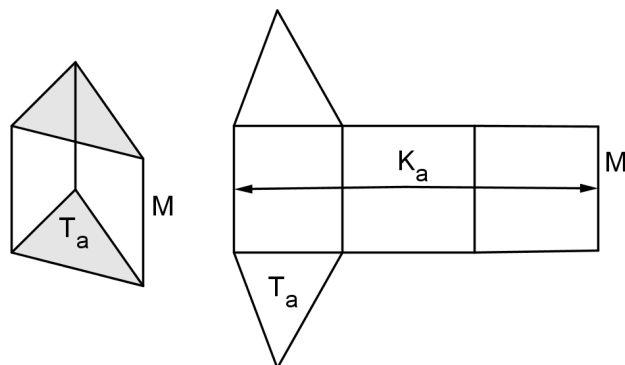
Egyenes hasáb



Ferde hasáb

Az egyenes hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_a + K_a \cdot M$, ahol T_a az alaplapp területe, K_a az alaplapp kerülete, M pedig a hasáb magassága.

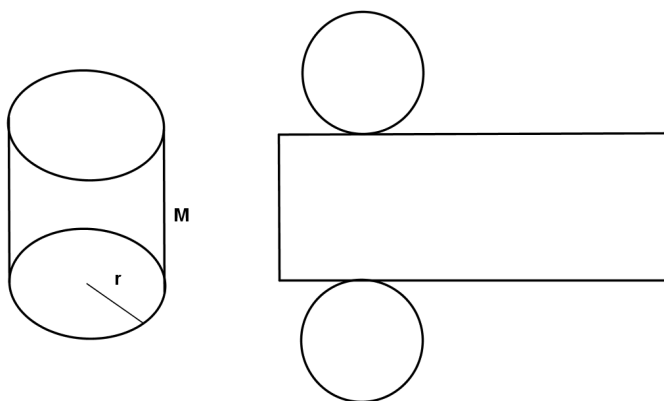
Ezt könnyen megkapjuk, ha felrajzoljuk a hasáb hálóját:



A hasáb térfogata: $V = T_a \cdot M$, ahol T_a az alaplapp területe, M a hasáb magassága.

A **forgáshenger** két alaplappja két egybevágó körlap, palástja egy görbe felület. A palást síkba teríthető, kiterítve téglalap alakú.

A forgáshenger **felszíne:** $A = 2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot M$, **térfogata:** $V = r^2 \pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a test magassága.



123. Számítsd ki a téglatest testátlójának a hosszát, ha élei:

a. 2 m, 2 m, 5 m;

b. 3 m, 17 dm, 20dm;

c. 24 dm, 45 dm, 68 dm;

d. 11 m, 11 m, 11 m!

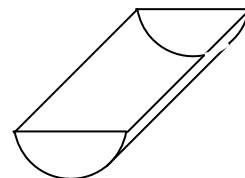
124. Rendezd térfogat szerint csökkenő sorrendbe a hengereket!

	A:	B:	C:	D:
r		4 cm	7 mm	
d	40 mm			14 cm
M	88 mm	2 cm	550 mm	7 mm

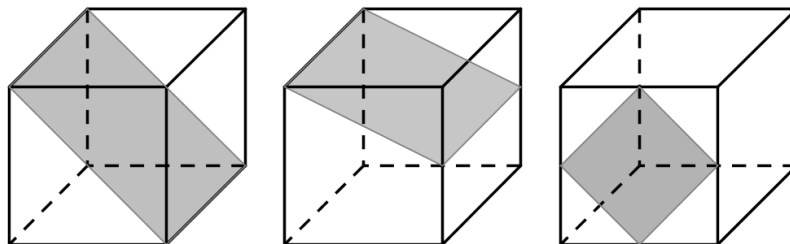
125. Rendezd felszín szerint növekvő sorrendbe az előző hengereket!

126. Hány m^3 víz fér egy 1,2 m átmérőjű, 6 m magas henger alakú csatornába?

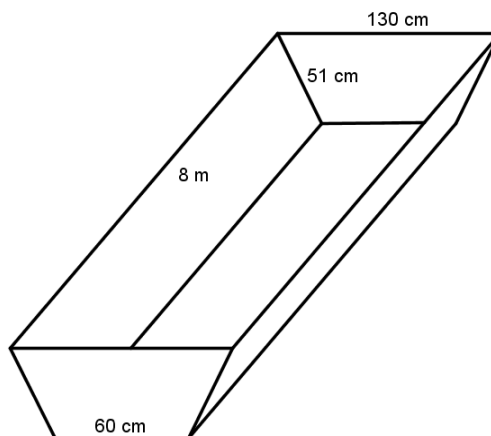
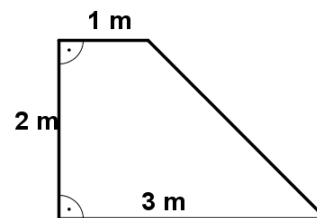
127. Hány liter víz fér egy 12 m hosszú, 11 cm sugarú, félkör alakú csatornába?



128. **Mennyi** bádoglemez szükséges 50 db 12 cm átmérőjű 1 m hosszú kályhacső elkészítéséhez? (Takarásra számítsunk 1,5 cm-t.)
129. Egy kocka lapátlója 6 dm hosszú. **Mekkora** az éle és a felszíne?
130. Egy kocka testátlója 9 dm hosszú. **Mekkora** az éle és a térfogata?
131. **Mekkora** a területe az 1 dm élhosszúságú kockába helyezett síklapoknak?



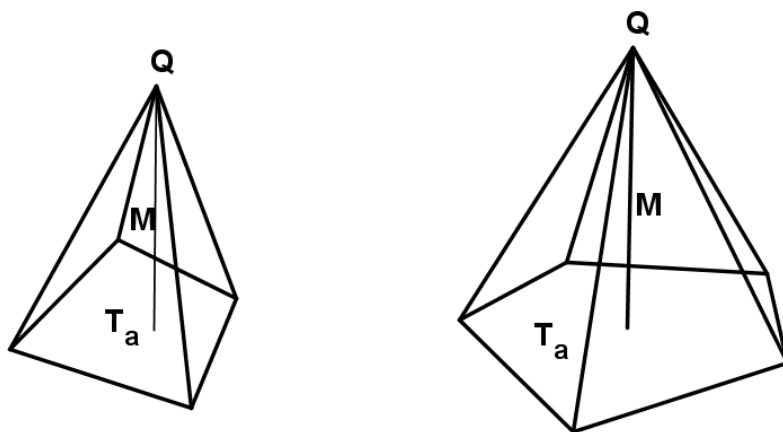
132. **Mekkora** a rombusz alapú egyenes hasáb felszíne, ha a rombusz átlói 6 cm és 8 cm, és a test magassága 10 cm?
133. Egy egyenes hasáb alapja az ábrán látható derékszögű trapéz, magassága 2,3 m. **Hány liter** a térfogata?
134. **Belefér-e** egy 1 dm élű kockába egy 18 cm hosszú pálca?
135. **Hány köbméter** földet kell kiásni az ábrán látható húrtrapéz keresztmetszetű egyenes árok kiásásakor?



136. Egy kocka minden élét megnöveljük 6 cm-rel, így a felszíne 576 cm^2 -rel nőtt. **Mekkora** a kocka térfogata?
137. **** Mekkora** a kocka felszíne és térfogata, ha az éleit 3 cm-rel megnövelve a térfogata 279 cm^3 -rel nő?

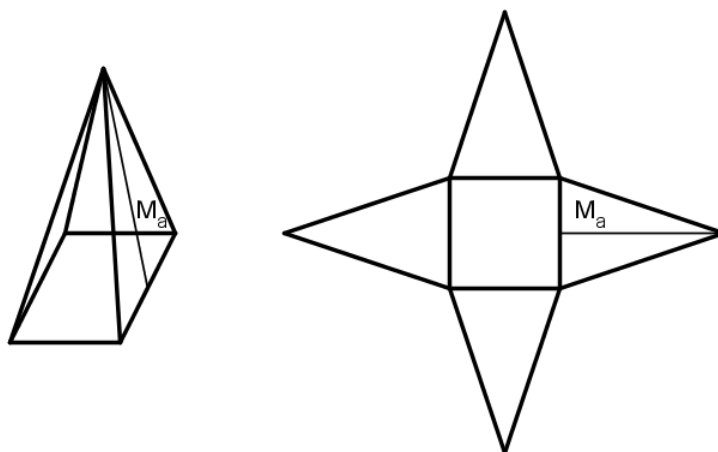
A gúla és a kúp

A **gúlát** egy n oldalú sokszög (T_a) és n darab egy csúcsba (Q) „összefutó” háromszög határolja. Az n oldalú sokszög a gúla **alaplapja**, a háromszögek az **oldallapok**. Az oldallapok az **oldalélekben**, az alaplap és az oldallapok az **alapélekben** metszik egymást. A Q alaplaptól vett távolsága a gúla **magassága** (M).

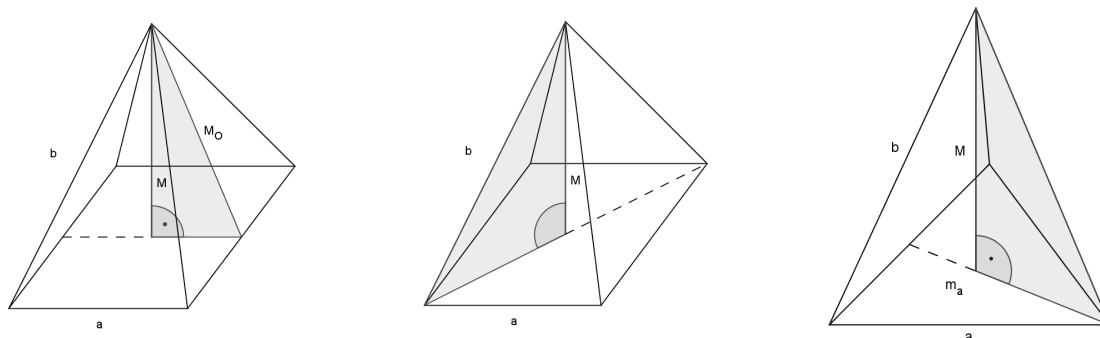


A gúla **térfogata** $V = \frac{T_a \cdot M}{3}$, ahol T_a a gúla alaplapja, M a gúla magassága.

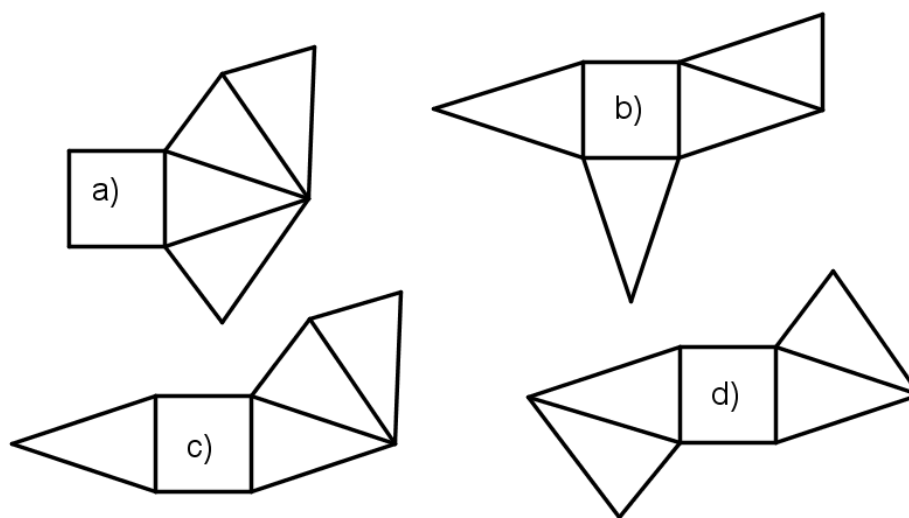
Ha a gúla lapjait kihajtjuk egy síkba, akkor a gúla **hálóját** kapjuk, ez az alaplapjából, és annyi háromszögből áll, ahány oldala van az alaplapjának. A gúla **felszíne** ezen síkidomok területének összege.



A gúla egyes adatai között akkor könnyű összefüggést találni, ha találunk egy olyan **derékszögű háromszöget**, amelyben a *Pitagorasz-tételt* alkalmazhatjuk. Egy pár példa látható az alábbi ábrákon:



138. **Szerkeszd meg** annak a gúlának a hálóját, amelynek
- alaplapja 3 cm oldalú négyzet, oldallapjai olyan egyenlő szárú háromszögek, melyek magassága 4cm;
 - alaplapja 4 cm oldalú négyzet, oldallapjai olyan egyenlő szárú háromszögek, melyek szára 3 cm;
 - alaplapja 3 cm oldalú szabályos háromszög, oldallapjai olyan egyenlő szárú háromszögek, melyek magassága 6cm!
 - Számítsd ki** a gúlák felszínét!
139. Egy háromszög alapú gúla minden éle 6 cm. **Szerkeszd meg** a hálóját! **Mekkora** a felszíne?
140. Egy légibemutatón négy repülőgép száll kötelékben úgy, hogy mindegyik 100 m-re van a másik háromtól. **Milyen** az a test, aminek a csúcsában szállnak ezek a repülők?
141. **Melyik** hálóból lehet, melyikből nem lehet négyzet alapú gúlát készíteni?

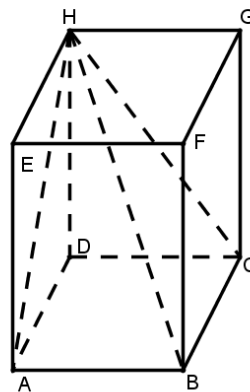


142. **Töltsd ki** a táblázatot, ha n a gúla alaplapja oldalainak száma, a a gúla alapéle, b az oldaléle, m_o az oldallap magassága!

	n	a	b	m_o	Felszín
a.)	3	10 cm		12 cm	
b.)	3		20 cm	16 cm	
c.)	4	6 cm	7 cm		
d.)	4	2,6 dm		37 cm	

143. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 5 dm. **Számítsd ki** a gúla felszínét, ha oldallapjának magassága:
- a. 3 dm; b. 2,5 dm; c. 2,6 dm!
144. **Mekkora** a térfogata annak a szabályos gúlának, amelynek
- alaplapja 17 cm oldalú négyzet, magassága 28 dm;
 - alaplapja 6,7 dm oldalú szabályos háromszög, magassága 8,28 dm;
 - alaplapja 34,6 cm oldalú szabályos háromszög, magassága 52,7 cm;
 - alaplapja 56 cm oldalú négyzet, oldaléle 78 cm;
 - alaplapja 5,9 cm oldalú szabályos hatszög, oldaléle 12,3 cm?

145. Egy négyzet alapú gúla alaplapjának átlója 6 cm. Az oldallapok szabályos háromszögek. **Számítsd ki** a felszínét és a térfogatát!
146. Egy négyzet alapú gúla oldaléle 12 cm. Az oldallapok magassága 7,5 cm. **Számítsd ki** a felszínét és a térfogatát!
147. ** Az $ABCDEFGH$ téglatestbe berajzolt AH, BH, CH átlók és DH él az $ABCD$ téglalap alapú gúlának az oldalélei. **Számítsd ki** ennek a gúlának a felszínét és térfogatát, ha $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm és $AE = 15$ cm!

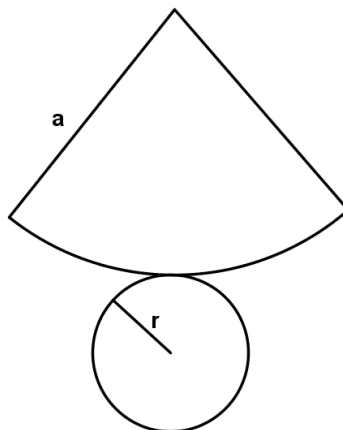
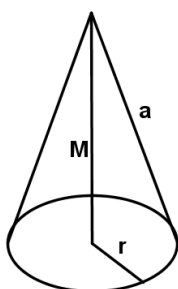


A kúpot valamilyen görbevonallal határolt síkidom – az alaplap –, és egy felület – a palást – határolja. Ha a Q a kúp csúcsa, akkor ennek távolsága az alaplap síkjától a gúla magassága (M). Most olyan kúpokkal foglalkozunk, aminek az alaplapja kör. Legyen az alapkör sugara r , a kúp magassága M , az alkotója a (az alapkör egy pontjának és a kúp csúcsának távolsága).

$$V = \frac{r^2 \pi \cdot M}{3}$$

A kúp térfogata: $\frac{r^2 \pi \cdot M}{3}$.

Ha a palástot kiterítjük, akkor egy olyan körcikket kapunk, melynek sugara az alkotó (a), a körív hossza pedig az alapkör kerülete ($2r\pi$). A kúp felszíne ennek a körcikknek és az alapkör területének összege: $A = r^2 \pi + a \cdot r \cdot \pi$.



148. **Mekkora** egy 4 cm alapkör sugarú kúp magassága, ha alkotója 60 mm?
149. **Mekkora** a 10 cm alapkör átmérőjű kúp alkotója, ha a magassága 127 mm?
150. Egy kúp alakú pezsgőspohár 9 cm magas, fedőkörének átmérője 6,6 cm. **Hány dl** folyadék fér bele?
151. **Mekkora** az egyenes kőrkúp térfogata és felszíne, ha alkotója 10 cm, alapkörének sugara 6 cm?
152. Egy egyenes kőrkúp kiterített palástja 12 cm sugarú félkör. **Mekkora** a kúp felszín és térfogata?

153. A vulkanikus hegy közelítőleg kúp alakú. Alapkörének átmérője kb. 7 km, magassága 2400 m. **Számítsd ki** a hegy térfogatát! **Add meg** az eredményt km^3 -ben! **Hány tonna** lávakövet tartalmaz a hegy, ha egy m^3 ilyen kő tömege 2,4 t?
154. Henger és kúp alapköre és térfogata egyenlő. **Milyen** a magasságuk aránya?
155. A bugaci pásztormúzeum kúp alakú tetőterének magassága 5,6 m, alapkörének átmérője 11,2 m. **Hány légméter** a tetőtér?
156. Egy derékszögű háromszög befogói 12 dm és 16 dm. **Forgasd meg** a háromszöget az egyik befogója körül! **Mekkora** az így kapott test felszíne és térfogata?
157. Egy 8 cm oldalú négyzetet átlója körül megforgatunk. **Mekkora** a keletkezett test térfogata és felszíne?

Geometriai transzformációk, egybevágóság

A **geometriai transzformációk** olyan függvények, melyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Most olyan transzformációkkal foglalkozunk, melyeknél az értelmezési tartomány és az értékkészlet is egy sík, illetve annak egy része.

Hozzárendelési szabályok:

1. Tengelyes tükrözés:

Adott egy t egyenes, a tengely, melynek minden pontjához önmagát rendeljük. A t egyenesre nem illeszkedő P ponthoz azt a P' pontot rendeljük, amelyre igaz, hogy a tengely merőlegesen felezi a PP' szakaszt.

2. Közepontos tükrözés:

Adott egy O pont, a középpont, melynek képe önmaga. A sík O -tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amely az OP egyenesen van, és az O felezi a PP' szakaszt.

3. Eltolás:

Adott egy $\underline{v}$ vektor, azaz irányított szakasz. A sík egy adott P pontjának képe az a P' pont, amelyre igaz, hogy a $\overrightarrow{PP'}$ irányított szakasz egyenlő a megadott $\underline{v}$ vektorral.

4. Pont körüli elforgatás

Adott egy O pont, a középpont, valamint az *elforgatás szöge* (nagysággal és iránnyal). Az O pont képe önmaga. A sík O -tól különböző bármely P pontjának a képe az a P' pont, amelyre $OP = OP'$ és a POP' szög nagysága és iránya az elforgatás szöge.

5. Merőleges vetítés:

Adott a síkban egy e egyenes (tengely), melynek minden pontjához önmagát rendeli. Az e egyenesre nem illeszkedő bármely P pont képe (vetülete) a P pontból az e egyenesre bocsátott merőleges P' talppontja.

6. Identitás (azonos leképezés):

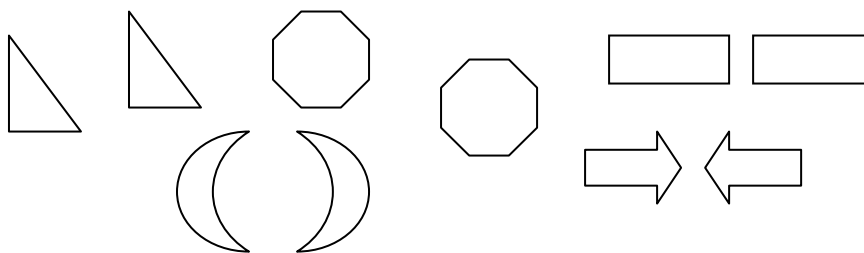
Minden ponthoz önmagát rendeli. Ilyen például a $\underline{v} = \underline{0}$ vektorral való eltolás.

158. Csoportosítsuk a korábban megismert geometriai transzformációkat (tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, vetítések)! Közülük melyek

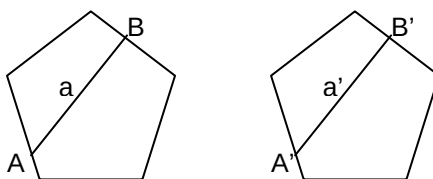
- a. egyenestartóak;
- b. szögtartóak;
- c. távolságtartóak;
- d. rendelkeznek fixponttal;
- e. rendelkeznek fixegyenessel;
- f. tartják meg a körüljárási irányt?

A távolságtartó transzformációkat nevezzük **egybevágósági transzformációknak**.
Vajon **miért?**

Két síkbeli alakzat egybevágó, ha egymásra helyezve pontosan fedik egymást (elmozgatással fedésbe hozhatók).



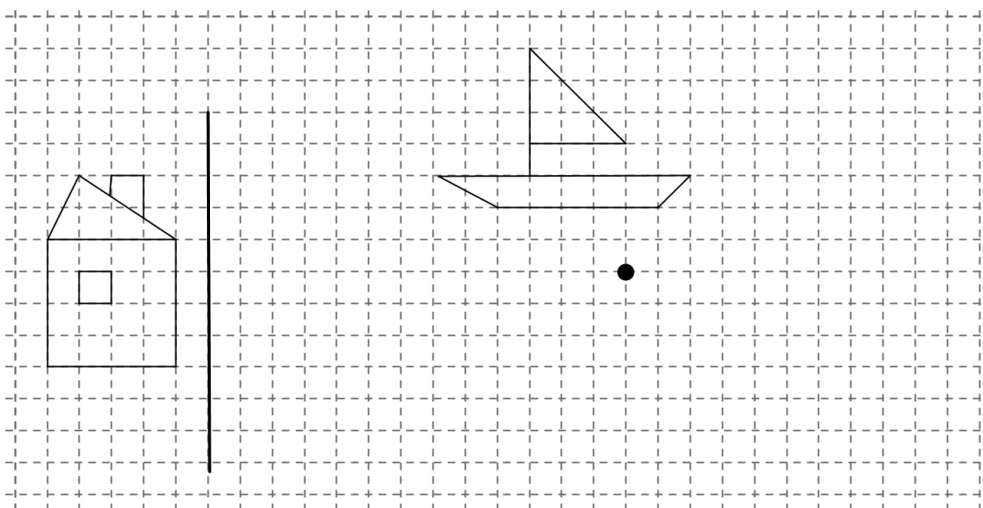
Egybevágónak tekintjük azokat az alakzatokat is, amelyek úgy hozhatók fedésbe, hogy az egyik alakzatot „megfordítjuk” (lásd jobb és bal tenyér lenyomata vagy a fenti ábrán a két holdacska vagy a két nyíl).



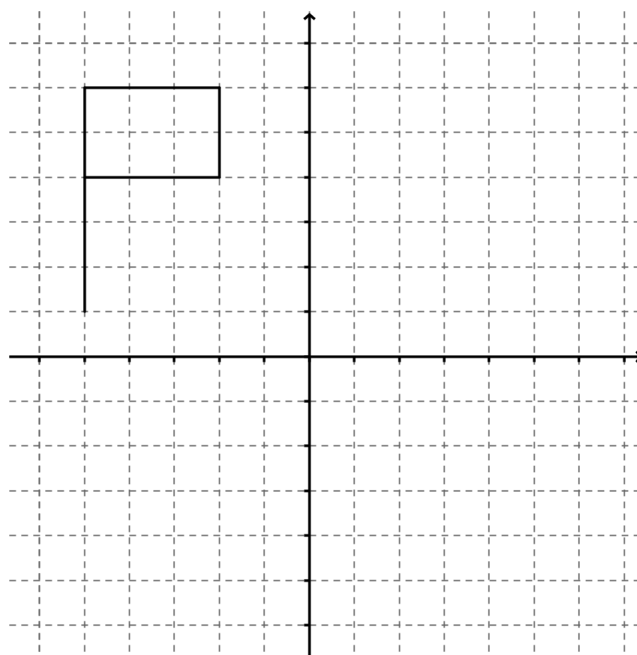
Két egybevágó alakzat arról is felismerhető, hogy az egyik alakzat bármely két pontját összekötő szakasz egyenlő a másik alakzat megfelelő két pontját összekötő szakasszal.

Az egybevágósági transzformációk azok a transzformációk, amelyekkel az egybevágó alakzatok fedésbe hozhatók.

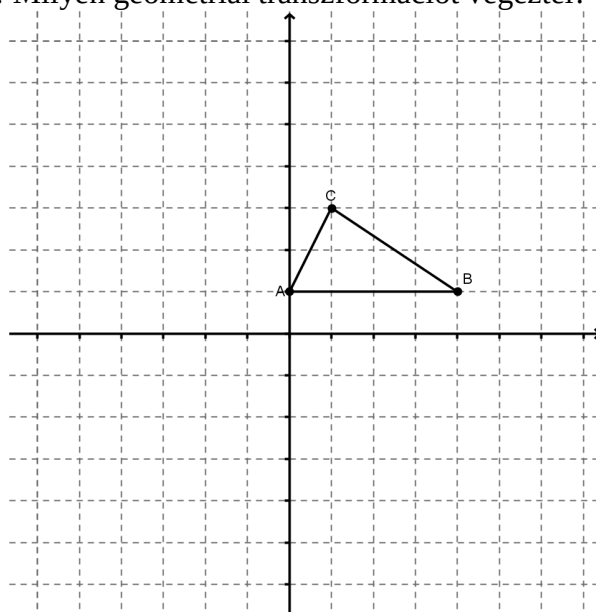
159. Végezd el a tengelyes és a középpontos tükrözést a négyzetrács segítségével!



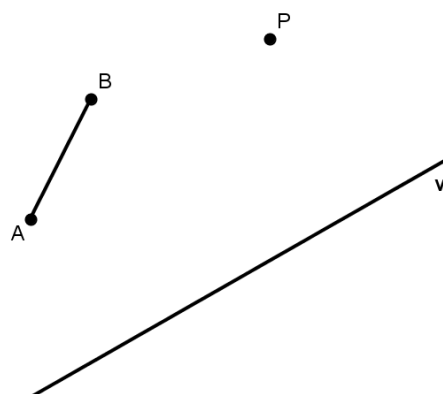
160. Legyen a hozzárendelés szabálya: $(x; y) \mapsto (x + 5; y - 2)$! **Ábrázold** az így kapott zászló képét! Melyik geometriai transzformációt adtuk meg?



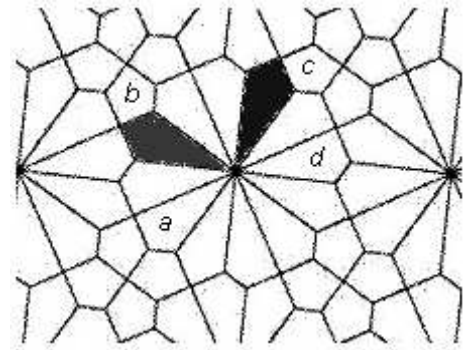
161. Legyen a hozzárendelés szabálya: $(x; y) \mapsto (-2x; -2y)$! **Ábrázold** az így kapott háromszög képét! Milyen geometriai transzformációt végeztél?



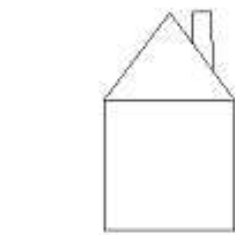
162. Vetítsd **merőlegesen** a v egyenesre a P pontot és az AB szakaszt!



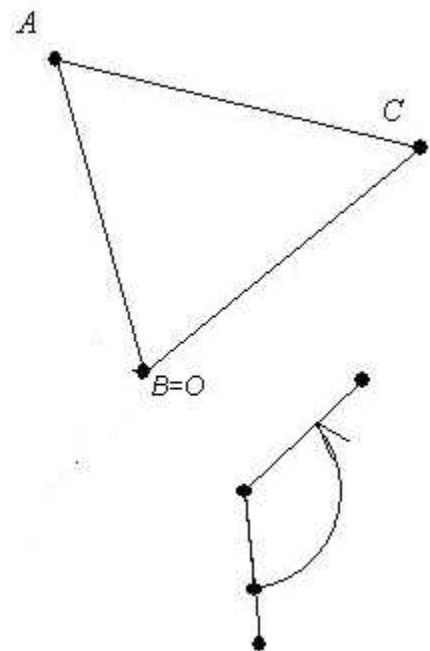
163. Egy geometriai transzformáció a balra lévő sötét négyszöget a jobbra lévő sötét négyszögbe viszi. **Keresd meg** a betűkkel jelölt mozaiklapok képét! Milyen transzformációt végeztél?



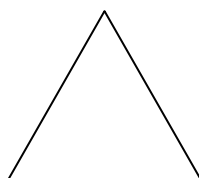
164. **Forgasd el** az alakzatokat az O középpont körül a megadott forgásszöggel! Színezz egymásnak megfelelő szakaszokat illetve szögeket a képen!



O

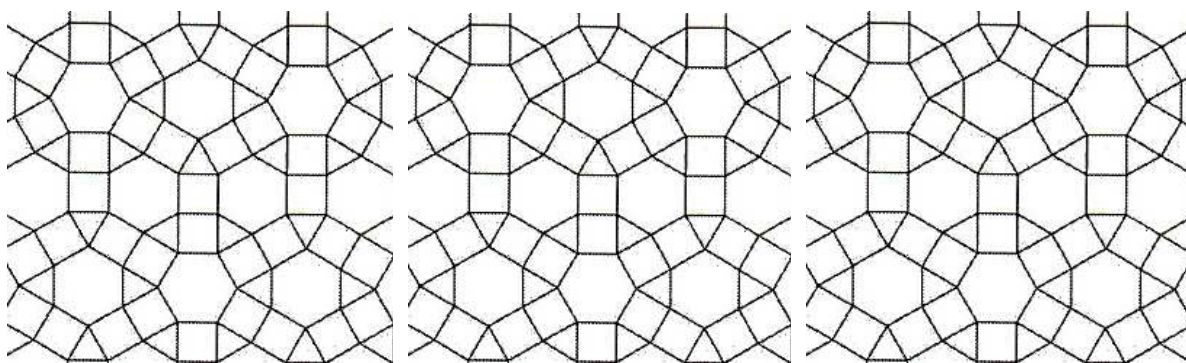


165. **Forgasd el** a szabályos háromszöget az O pont körül -45° -kal!

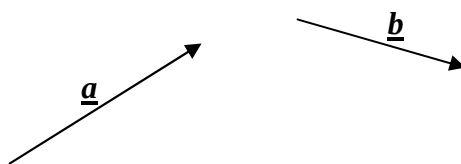


$\bullet O$

166. **Színezd** a parkettát úgy, hogy forgásszimmetrikus legyen! **Keress több** megoldást! **Add meg** a szimmetria rendjét is!

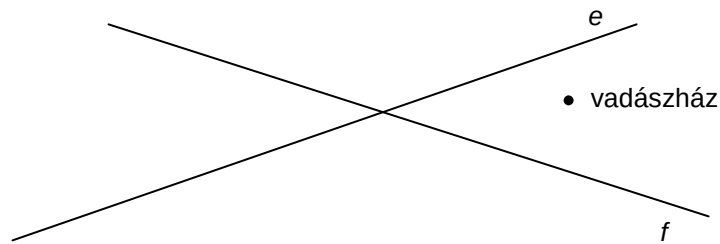


167. Rajzolj egy háromszöget és két egymással párhuzamos egyenest! **Tükrözd egymás után** a háromszöget a két egyenesre. Mit tapasztalsz? (Lehet-e helyettesíteni a két tükrözést egyetlen transzformációval?)
168. Rajzolj egy téglalapot! **Forgasd el** valamely csúcsa körül először 45° -kal, majd 30° -kal! Milyen transzformációval helyettesíthető a két elforgatás?
169. Rajzolj egy kört! **Told el** először az **a** majd a **b** vektorral! Tudnád-e egyetlen transzformációval helyettesíteni a két eltolást?

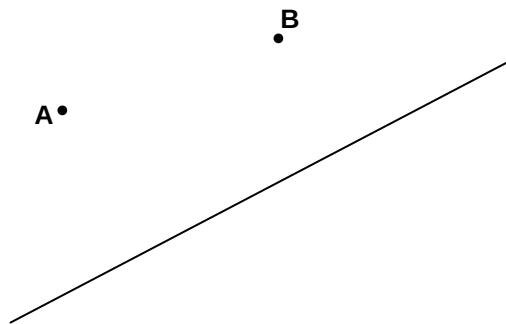


170. Rajzolj egyenlőszárú háromszöget és két, egymást metsző egyenest! **Tükrözd a** háromszöget egymás után a két egymással 30° -os szöget bezáró egyenesre tengelyesen! Helyettesítsd a két transzformációt egyetlennel!
171. **Szerkesszünk**
- a. négyezetet, ha adott az átlója;
 - b. paralelogrammát, ha adott két oldala és egy szöge;
 - c. rombuszt, ha adott két átlója!
172. **Szerkesszünk** háromszöget, ha adott két oldala és a harmadikhoz tartozó súlyvonal! (A háromszög oldalfelező pontjait a szemközti csúccsal összekötő szakaszok a háromszög **súlyvonalai**.)
173. **Szerkesszünk** háromszöget, ha adott a három oldal felezőpontja!
174. **Szerkesszünk** trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, a szárak és a magasság!
175. **Tükrözzünk** egy tetszőleges pontot egy adott négyszög egyik oldalfelező pontjára, majd a tükröképet a következő oldalfelező pontra és így tovább. Négy tükrözés után hova jutunk?

176. Egy erdőben két út keresztezi egymást, nem messze innen van egy vadászház. **Honnan induljunk el** az „e” útról az „f” felé, hogy a vadászház éppen félúton legyen úgy, hogy az indulási hely, a vadászház és a megérkezési hely egy egyenesre essen?



177. Egyenes országútnak ugyanazon oldalán helyezkedik el két üzem, amelyek üzemeltetéséhez transzformátorállomást akarnak elhelyezni közvetlenül az út mellett. **Hová tegyék**, hogy a legrövidebb vezetékre legyen szükség?



A háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei

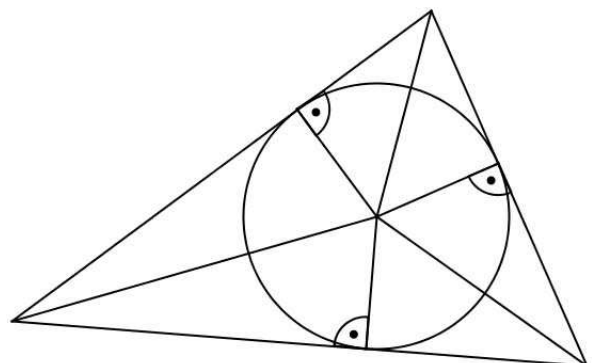
178. Milyen tulajdonságú pontokat határoznak meg egy háromszög

- oldalfelező merőlegesei
- szögfelezői

Mit mondhatunk az oldalfelező merőlegesek, illetve a szögfelezők metszéspontjairól?

Meghatározás: A *szögfelező* egyenes olyan egyenes, amely felezi a háromszög belső szögeit. Minden háromszögnek három szögfelezője van.

Jelölésük: f_α , f_β , f_γ

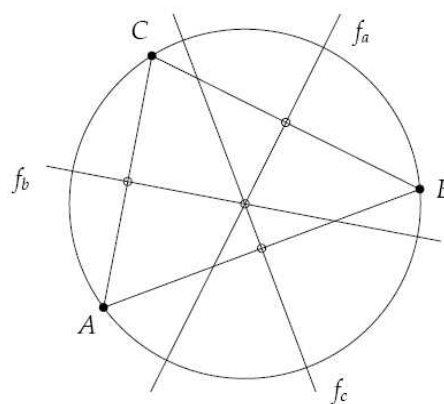


179. Szerkessz egy háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 6,5 cm és 9 cm. **Szerkeszd meg** a háromszög mindhárom szögfelezőjét! Mit tapasztalsz?

Tétel: A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja.

180. Az előző. feladat háromszögébe **szerkeszd meg** a beírt kört! (Vigyázz, előbb meg kell szerkesztened a sugarat!)

Meghatározás: Az *oldalfelező merőleges* egyenes olyan egyenes, amely merőleges a háromszög oldalára, és átmegy az oldal felezőpontján. Minden háromszögnek három oldalfelező merőlege van. Jelölésük: f_a , f_b , f_c



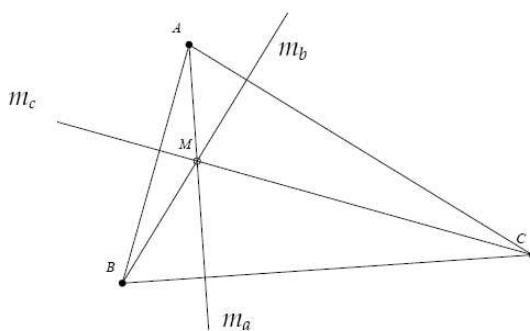
181. Szerkessz egy háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 6,5 cm és 9 cm. **Szerkeszd meg** a háromszög mindhárom oldalfelező merőlegesét! Mit tapasztalsz?

Tétel: A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög köré írható körének középpontja.

182. Szerkeszd meg az előző feladat háromszögének a köré írt körét!

Meghatározás: A *magasságvonal* olyan egyenes, amely átmegy a háromszög csúcsán, és merőleges a szemközti oldalegyenesre. Minden háromszögnek három magasságvonala van. Jelölésük: m_a , m_b , m_c .

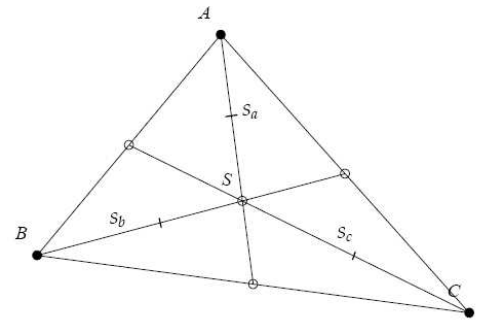
183. Szerkessz egy háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 6,5 cm és 9 cm. **Szerkeszd meg** a háromszög mindhárom magasságvonalát! Mit tapasztalsz?



Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, ez a háromszög magasságpontja. A magasságpont jele: M .

184. Az előző feladat háromszögében **jelöld meg** a magasságpontot!

Meghatározás: A *súlyvonal* a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. A háromszögnek három súlyvonala van. Jelölésük: S_a, S_b, S_c .



185. Szerkessz egy háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 6,5 cm és 9 cm. Szerkeszd meg a háromszög mindhárom súlyvonalát! Mit tapasztalsz?

Tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a háromszög súlypontja. Jele: S .

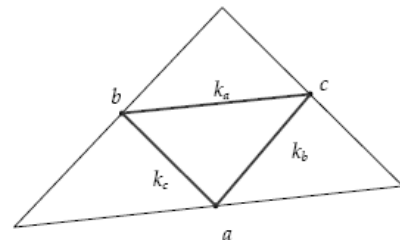
186. Az előző feladat háromszögében **jelöld meg** a súlypontot! **Mérd le** mindhárom súlyvonal esetén a súlypont és a csúcs, valamint a súlypont és az oldalfelezési pont távolságát! Mit tapasztalsz?

Összefüggés: A *súlypont* a *súlyvonalnak* az oldalhoz közelebbi harmadoló pontja.

A középvonal

I. A háromszög középvonala

A középvonal a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz. Jelölése: k_a, k_b, k_c . A háromszög középvonalai **párhuzamosak** a háromszög oldalával. A középvonalak hossza **feleakkora**, mint a velük párhuzamos oldal hossza. Tehát az ábra jelöléseit felhasználva:



$$k_a \parallel a, k_b \parallel b, k_c \parallel c$$

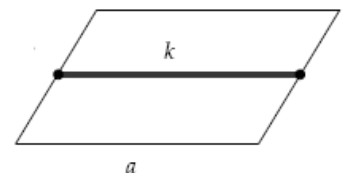
és

$$k_a = \frac{a}{2}; k_b = \frac{b}{2}; k_c = \frac{c}{2}$$

II. A paralelogramma középvonala

A paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakaszt középvonalnak nevezzük. A paralelogrammának két középvonala van. A középvonal párhuzamos és egyenlő a paralelogramma oldalával.

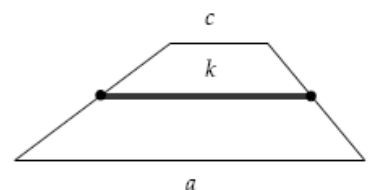
$$k \parallel a \quad k = a$$



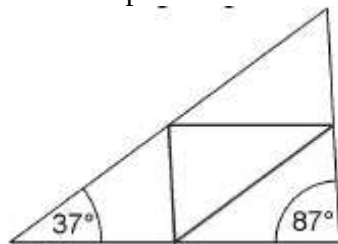
III. A trapéz középvonala

A trapéz középvonala a szárak felezőpontját összekötő szakasz. A trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal, és hossza az alapok számtani közepével egyenlő.

$$k \parallel a \quad k = \frac{a+c}{2}$$



187. **Mekkora** egy háromszögben a középvonalak által meghatározott háromszög szögei?

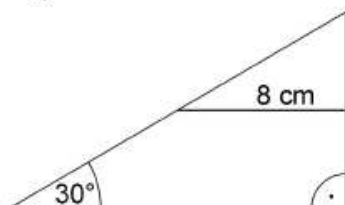


188. Töltsd ki az alábbi táblázatot (a, b, c: oldalak, k_a , k_b , k_c : középvonalak, K: terület)

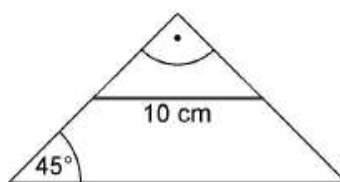
	a	b	c	k_a	k_b	k_c	K
a.	10 cm	12 cm				7,5 cm	
b.	0,12 m	3 dm					70 cm
c.	5 cm				3,5 cm		22 cm
d.				1,2 dm	8 cm		0,7 m

189. **Mekkora** az ábrán látható háromszög kerülete és területe, ha adott a közép vonala?

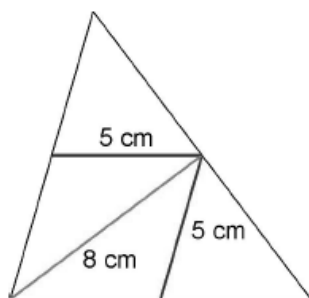
a)



b)



190. **Mekkora** a rajzon látható háromszög területe és kerülete? (Két középvonala 5 cm.)



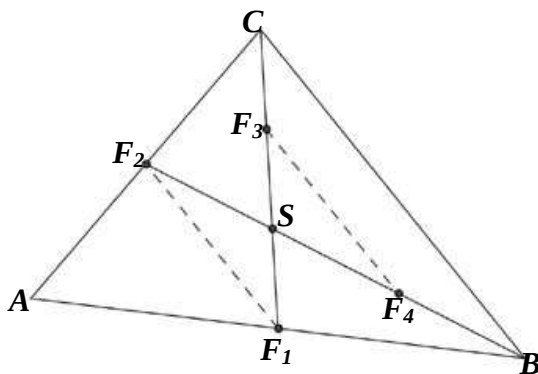
191. Egy háromszög egyik oldalán fekvő szögeinek nagysága 48° és 72° . **Mekkora szöget zár be** egymással az ezzel az oldallal szemkötti csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?

192. Használjuk az ábrát és a háromszögek középvonalainak tulajdonságait annak megállapításához, hogy a súlyvonalak milyen arányban osztják egymást!

Milyen négyszög az $F_1F_2F_3F_4$ és miért?

Miért fog az A csúcsból induló súlyvonal is átmenni az S súlyponton?

Nézzünk utána: miért hívják így a súlyvonalakat és a súlypontot?



193. **Milyen négyszöget** határoznak meg egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai? Igaz ez térbeli négyszögre is?

Thalész tétele, érintőnéyszögek

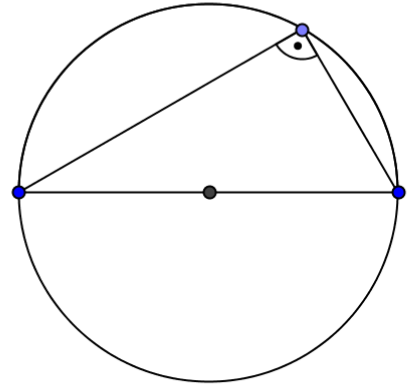
Elevenítsük fel, mit tapasztaltunk a derékszögű háromszögek köré írható körök középpontjaival kapcsolatban!

194. Bizonyítsuk be Thalész tételét, amely így hangzik:

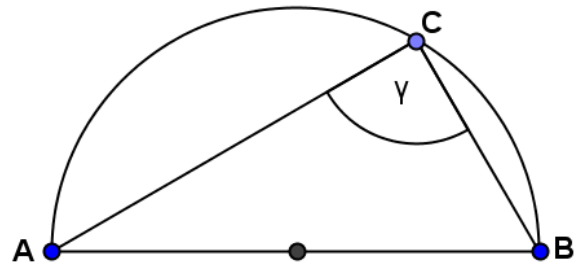
Azonos átfogójú derékszögű háromszögek derékszögének csúcsai az átfogóra mint átmérőre rajzolt köríven vannak.

Segítség: Tükrözzük a derékszögű háromszöget az átfogó felezőpontjára!
Milyen négyszöghöz jutunk?

Hol van a négyszög köré írható kör középpontja?



195. Bizonyítsuk be a tétel megfordítását is, hogy az ábrán látható háromszög γ szöge derékszög!
(Általánosan: félkörív belső pontjaiból az átmérő derékszögben látszik).



A Thalész-tételt szokás még így is megfogalmazni: **A síknak azok a pontjai, amelyekből egy adott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó körvonalon vannak, kivéve az átmérő két végpontját. Ez a kör s Thalész-kör.**

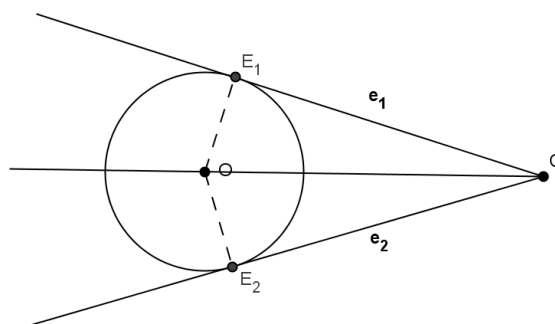
196. Egy falnak támasztott pálca lecsúszik. **Milyen alakzatot** ír le a pálca középpontja?

197. **Rajzoljunk** egy kört és egy négyszöget. **Szerkesszünk** négyszöget, amelynek oldalai az előbbi négyszöggel párhuzamosak és érintik a kört?

198. Adott egy O középpontú kör és körön kívül egy P pont.

Szerkesszünk a körhöz olyan érintőt, amely áthalad a P ponton! Hány ilyen érintő van?

Mit mondhatunk az érintési szakaszokról?



199. Egy derékszögű háromszög köré írt kör sugara 5 cm, az egyik befogójának hossza

a. 6 cm; b. 8 cm; c. 2 cm; d. a.

Számítsd ki a másik befogó hosszát és a területét!

200. Egy 4 cm sugarú kör O középpontjának és a sík egy P pontjának a távolsága

a. 5 cm; b. 7 cm; c. 12 cm; d. 23 cm.

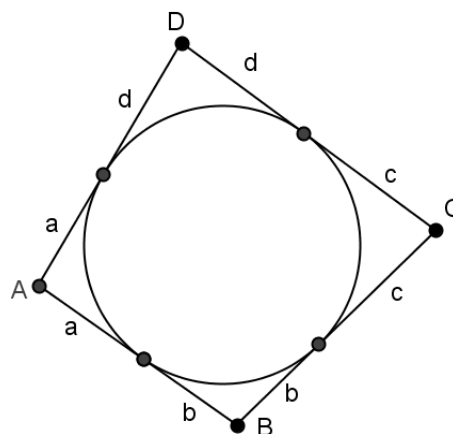
Számítsd ki a körhöz a P -ből húzható érintőszakaszok hosszát az egyes esetekben!

201. **Igazold**, hogy a háromszög két magasságának talppontja egyenlő távol van a harmadik oldal felezőpontjától!

202. **Vegyünk fel** egy egyenlő szárú háromszöget, és rajzoljunk kört az egyik szár, mint átmérő fölé! **Hol metszi** ez a kör a háromszög alapját? Válaszodat **indokold**!

203. Az **érintősokszög** olyan sokszög, amelynek oldalai egy kör érintői. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnégyszög két-két szemközti oldalának összege egyenlő!

$$AB + CD = BC + AD$$



204. Szimmetrikus trapézba kör írható. **Mekkorák** a szárai és a területe, ha a két alapja 8 cm és 12 cm?

205. **Szerkesszünk** érintőnégyszöget, ha adott a beírt körének sugara és

a. két oldala és az ezek által közbezárt szöge;

b. három szöge!

Szerkesztések

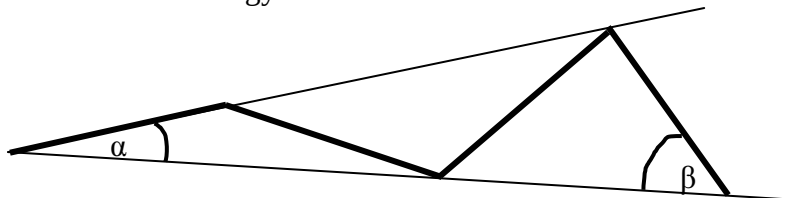
A feladatok **megoldásának lépései**:

1. Vázlat, mely a szerkesztendő alakzatot ábrázolja, jelölve rajta az adatokat és összefüggéseket. (Pl. derékszög, egyenlő oldalak vagy szögek...)
2. A szerkesztés menetét végiggondolni, és eszerint a vázlatot beszámozni.
3. A szerkesztés menetének leírása a megszámozott vázlat lépései szerint.
4. Szerkesztés
5. Megvizsgálni, hogy hány megoldás lehet, és ez hogyan függ az adatoktól.

206. **Szerkeszd meg** a háromszöget, ha $a = 4,5\text{ cm}$ $b = 4\text{ cm}$ $\beta = 45^\circ$! Szerkeszd meg a magasságpontját és a súlypontját!
207. **Szerkessz háromszöget**, melynek oldalai 5 cm, 6,5 cm és 9 cm. **Szerkeszd meg** a beírt és a köréírt körét is!
208. **Szerkessz háromszöget**, ha adott két oldala (a és b), és az a oldallal szemközti α szög. (Itt elég a három feladathoz egy közös vázlat.)
- a. $a = 10\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$
 - b. $a = 4\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$
 - c. $a = 8\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$
209. **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6\text{ cm}$, $m_a = 4,7\text{ cm}$, $b = 7,3\text{ cm}$!
210. **Szerkessz rombuszt**, ha adott egy oldala ($a = 4\text{ cm}$), és egy szöge ($\alpha = 45^\circ$)!
211. **Szerkessz deltoidot**, ha adott két oldala (2,5cm és 3cm), valamint az általuk bezárt szög (75°)!
212. **Szerkessz trapézt**, melynek két alapja 5cm és 2,5cm, szárai 3 és 3,5cm hosszú!
213. **Szerkessz háromszöget**, ha adott két oldala (5 cm és 7 cm), és a harmadikhoz tartozó súlyvonal (10 cm)!
214. **Szerkessz háromszöget**, ha két oldala 4,6 cm és 6 cm és a harmadikhoz tartozó magasság 3 cm. (Segítség: gondolj a Thalész-tételre!)
215. **Szerkessz derékszögű háromszöget**, ha adott az átfogó (8 cm) és az átfogóhoz tartozó magasság (3,5 cm)! Hány megoldás van?
216. **Szerkessz háromszöget**, ha adott a b oldala, a c oldalhoz tartozó m_c magasság és a köré írt kör sugara (r).
- The diagram shows three horizontal line segments. The first segment is labeled b below it. The second segment is labeled m_c below it. The third segment is labeled r below it.
217. **Szerkessz háromszöget**, ha adott a három oldal felezőpontja! (Ezeket vedd fel tetszőlegesen!)
218. **Szerkessz trapézt**, ha adott a két párhuzamos oldalának az összege, a két szára és a magassága!

Feladatgyűjtemény

- F1.** Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldala kisebb a félkerületnél.
- F2.** Igazoljuk, hogy a konvex négyszög átlóinak összege kisebb a négyszög kerületénél, de nagyobb a négyszög félkerületénél.
- F3.** Az ábra kiemelt szakaszai egyenlők.

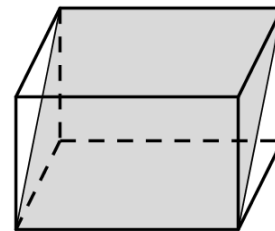


- a.** Ha $\alpha = 15^\circ$, akkor $\beta = ?$
- b.** Mekkora lehet az α , ha az előző módon 10 egyenlő szakaszt lehet rajzolni?
- F4.** Metsszünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal, és szerkesszünk olyan pontot, amely mindhárom egyenestől egyenlő távolságra van!
- F5.** Tűzzünk ki két pontot! Egyikük körül forgassunk egy rajta átmenő egyenest, és minden helyzetben tükrözzük rá a másik pontot! Mi a tükröképek mértani helye?
- F6.** Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó szögfelezőkre! Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak!
- F7.** Hány méter hosszú az a deszka, amit 3 méter távolságból a falnak támasztottak, és 1,6 méter magasra visz fel?
- F8.** Egy rombusz egyik átlója 48 mm, másik átlója 2 cm. Mekkora az oldalhossza?
- F9.** Milyen távolságra van a 25 mm sugarú körbe húzott 48 mm hosszú húr?
- F10.** Hány m^3 víz fér egy 80 cm átmérőjű, 110 cm magas körhenger alakú hordóba?
- F11.** Hány liter víz fér egy 3 m hosszú, 40 cm átmérőjű félhenger alakú itatóba?
- F12.** Egy 80 cm magas henger alakú vízmelegítő tartály űrtartalma 300 liter. Mekkora a tartály átmérője?
- F13.** Egy téglatest három élének aránya 4:7:11, tizenkét éle összesen 264 cm hosszú. Mekkora a felszíne, térfogata, testátlója?
- F14.** Szabályos háromszög alapú egyenes hasáb magassága 35 cm, oldallapjának átlója 37 cm. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?
- F15.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm, magassága ennek másfélszerese. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

F16. Egy háromszög alapú egyenes hasáb olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja 12 cm, szárai 10 cm hosszúak. A hasáb magassága megegyezik a háromszög rövidebbik magasságával. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

F17. Téglalap átlós metszetét két szemközti éle és két szemközti lapátlója határozza meg. Számítsd ki a háromféle átlós metszet területét és az így keletkezett téglalapok átlóját, ha a téglatest élei

- a. 2 m, 5 m és 7 m;
- b. 7 cm, 17 cm és 27 cm;
- c. 1,6 dm, 2,3 dm és 5 dm!



F18. Egy kétajtós ruhásszekrény szélessége 110 cm, mélysége 55 cm, magassága 165 cm. Elfér-e benne egy 2 m-es rúd? Mekkora a szekrény térfogata?

F19. Melyik az a gúla, aminek

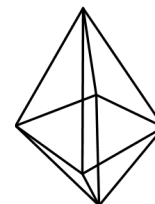
- a. 4 b. 5 c. 6 d. 12
- éle van?

F20. Egy 36 cm^2 területű, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla egy oldallapjának területe az alaplap területének 75%-a. Mekkora a gúla felszíne? Mekkora a térfogata?

F21. Gyurmából olyan négyzet alapú gúlát formázunk, aminek az alapéle és a magassága is 4 cm. Hány cm^3 gyurmára van ehhez szükség?

F22. Az ábrán látható karácsonyfadísz két 25 cm^2 alapterületű, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla összeillesztésével készítettük. A felső gúla

- a. Számítsd ki, hány cm^2 papírt használtunk el.!
- b. Ha a díszet marcipánból készítenénk, mennyi marcipánt használunk el?



F23. Mekkora annak az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, amely alapkörének sugara 20 cm, nyílásszöge pedig derékszög?

F24. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 5 cm. Mekkora a magassága, ha térfogata 186 cm^3 ?

F25. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 7 cm. Mekkora az alkotója, ha térfogata 200 cm^3 ?

F26. Körkúp magassága 12 cm, alkotója 20 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

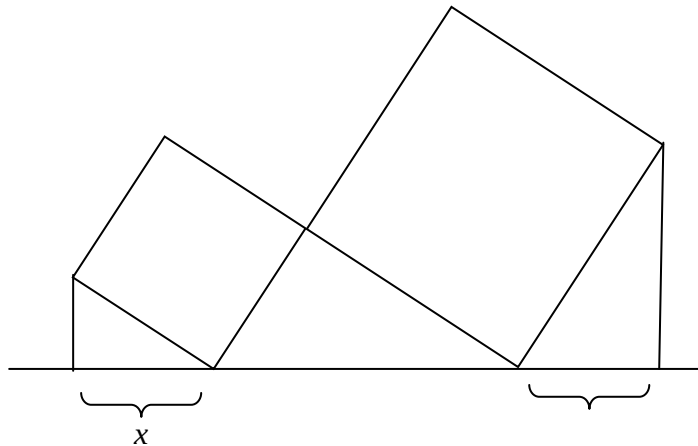
F27. Egy egyenes körkúp alkotója a magasságának háromszorosa, az alapkörének átmérője 12 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

F28. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy a szemközti oldalnak az egyenesen lévő merőleges vetülete adott hosszúságú legyen!

F29. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magasság!

- F30.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara, és egy másik oldalhoz tartozó magasság!
- F31.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal!
- F32.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magasságvonal és súlyvonal!
- F33.** Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala: a , az ezzel szemközti szöge: α , továbbá
a. az oldalhoz tartozó magassága (m_a);
b. az oldalhoz tartozó súlyvonala (s_a)!
- F34.** Szerkesszünk háromszöget, ha adottak a súlyvonalai!
- F35.** Szerkesszünk négyzetet, ha adott oldalának és átlójának összege!
- F36.** Szerkesszünk téglalapot, ha a négy oldalán adott egy-egy pont és ismerjük az oldal hosszát!
- F37.** Szerkesszünk trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, az átlók hossza és egyik szára!
- F38.** A biliárd asztalon csak a fejér és a fekete golyó van. Hogyan lökjük meg a fehéret úgy, hogy
a. az egyik fallal való ütközés után eltalálja a feketét;
b. mindegyik fallal egyszer ütközzön, majd eltalálja a fekete golyót?
- F39.** Két kör két metszéspontja közül az egyik M. Szerkesszünk M-en át olyan szelőt, amely egyenlő húrokat metsz ki a két körből!
- F40.** Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak által bezárt szög nagysága, a szöghöz tartozó csúcs és két egyenes, amelyeken az alap egy-egy csúcsa fekszik!
- F41.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két magasságának a talppontjai egyenlő távolságra vannak a harmadik oldal felezőpontjától!
- F42.** Adott egy egyenes és rajta kívül két pont. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az egyenesen, másik két csúcsa pedig az adott pontokban van!
- F43.** Írjunk kört az egyenlő szárú háromszög egyik szára, mint átmérő fölé! Bizonyítsuk be, hogy ez a kör felezi a háromszög alapját!
- F44.** Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogójának egyenese és befogóiból egy-egy pont, továbbá az átfogóhoz tartozó magasság!
- F45.** Rajzoljunk egy körbe egy húrt! Szerkesszünk olyan helyzetben egy adott hosszúságú húrt, hogy ezt az első húr felezze!

- F46.** Két egymásra merőleges egyenes egyikén tűzzünk ki két pontot, és szerkesszünk rajtuk átmenő kört, amely a másik egyenest érinti.
- F47.** Rajzoljunk egy kört és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a pont körül egy kört, amely az adott körből egy adott hosszúságú húrt metsz ki.
- F48.** Két érintkező kör egyikében egy tetszőleges átmérő végpontjait kössük össze az érintkezési ponttal! Mutassuk meg, hogy ezek az egyenesek a másik körből egy átmérő végpontjait metszik ki!
- F49.** Egy kocka A csúcsából kiinduló és az A-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok x, y, z . Állítsuk elő ezek segítségével
- a.** az A csúcsból kiinduló élvektorokat,
- b.** a testátlóvektorokat.
- F50.** **Legyenek A, B, C, D, E adott pontok. Mekkora λ értéke, ha $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \lambda(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$?
- F51.** **Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő egyenes párhuzamos az alapokkal!
- F52.** **Egy háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcshoz mutató vektorok legyenek a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy az O-ból felmért a + b + c = m vektor végpontja a háromszög magasságponja!
- F53.** **Az ábra négyszögei négyzetek. Bizonyítsuk be, hogy $x = y$!



- F54.** Egy paralelogramma oldalai fölél négyzeteket rajzolunk. A négyzetek középpontjai A , B , C és D . Mutassuk meg, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet!
- F55.** **Napsütéses időben szeretnéd megnézni egy fa magasságát az árnyékok segítségével. Ha a te árnyékod 80 cm, a fa árnyéka pedig 5 m, mekkora fa?
- F56.** **Adott az a , b és c szakasz. Szerkessz olyan x szakaszt, amelyre fennáll, hogy $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$!
(Gondolj a párhuzamos szelők tételére!)

F57. **Trapéz párhuzamos oldalai 12 és 8 egység, szárai 4 és 5 egység. Számítsd ki a kiegészítő háromszög területét és területét!

F58.

- Mekkora a szabályos nyolcszög egyik külső szöge?
- Mekkora a szabályos hétszög egyik belső szöge?
- Mekkora a szabályos ötszög egyik belső szöge?
- Hány átlója van a kilencszögnek?

F59.

- Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala (a és b) és az a oldallal szemközi csúcsból kiinduló magasságvonal hossza.
- Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala (a), az adott oldalhoz tartozó magassága (m_a) és az adott oldalon lévő egyik szöge (β).
- Szerkeszd meg egy háromszög beírt és köré írható körét!
- Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala, és a harmadikhoz tartozó súlyvonal!
- Szerkessz trapézt, ha adott négy oldalának a hossza!
- Szerkessz trapézt, ha adott a középvonala, és két szára!

F60.

- Szerkeszd meg azt a derékszögű háromszöget, melynek derékszögű csúcsa egy adott e egyenesen található, A és B csúcsa pedig adott (az e egyenes azonos oldalán vannak).
- Szerkeszd meg egy körön kívüli P pontból a körhöz húzható érintőket. Mit tudsz ezekről?
- Szerkessz háromszöget, ha adott az A csúcsából kiinduló két oldal hossza és az A csúcsból kiinduló magasság hossza.
- Szerkessz háromszöget, ha adott az a oldala és az a oldal csúcspontjaiból kiinduló súlyvonalak hossza.
- Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala, és a másik két oldalhoz tartozó magassága!

F61.

- Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai által alkotott $EFGH$ négyszög paralelogramma. A bizonyításhoz használj ábrát!
- Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges konvex négyszög kerülete mindenképpen nagyobb, mint az egyik (bármelyik) átlójának kétszerese!

F62.

- Számítsd ki a háromszög területét, ha egyik oldala 5cm, és a másik két oldallal párhuzamos középvonala 3cm és 2,5cm!
- Számítsd ki a húrtrapéz területét és átlójának hosszát, ha alapja 15cm és 9cm, szárai pedig 6cm hosszúak!
- Egy háromszög egyik csúcsánál 35° -os, másik csúcsánál 65° -os szög található. Mekkora szöget zár be egymással a szemközi csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?

F63. Melyik négyszögeknek ezek az egyedi tulajdonságai (a leírt négyszögön kívül más négyszögre ne legyenek igazak ezek a tulajdonságok!):

- Oldalai egyenlők:

- b. Középpontosan szimmetrikus:
- c. Egyik átlója szimmetriatengely:
- d. Bármely két szomszédos szöge 180° -ra egészíti ki egymást:
- e. Átlói azonos hosszúságúak és felezik egymást:

F64.

- a. Egy egyenlőszárú háromszögben az alappal szemközti szög 80° . Mekkora szöget zár be az alappal a szárhoz tartozó magasság?
- b. Mekkora az egyenlőszárú derékszögű háromszögbe írt kör sugara, ha a befogó 10cm?
- c. Egy fatörzset kör alakú szeletekre vágunk, majd a széleiket levágva téglalap alakú deszkákat gyártunk. Mekkora a deszka oldalai, ha a fatörzs átmérője 10 dm, és a téglalap oldalainak az aránya 3 : 4?

F65. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis, és indokold!

- a. Ha egy négyszög téglalap, akkor érintőnégyszög
- b. Paralelogramma nem lehet érintőnégyszög
- c. A háromszög magasságvonalainak metszéspontja mindig a háromszögön belül van

F66.

- a. Mekkora szöget zár be egymással egy háromszög két csúcsából kiinduló szögfelezője, ha a harmadik csúcsnál 48° szög található?
- b. Egy C csúcsánál derékszögű háromszög átfogója 16 egység, kisebbik befogója 8 egység. Milyen távol van egymástól az átfogón lévő magasságtalppont és a köré írható kör középpontja?

F67. Válaszd ki a helyes állításokat:

- a. Minden paralelogramma trapéz is.
- b. Minden téglalap rombusz is.
- c. A rombuszok paralelogrammák is.
- d. Minden rombusz deltoid.
- e. Minden téglalap paralelogramma.
- f. A négyzetek a téglalapok és a rombuszok halmazának metszetében helyezkednek el.
- g. A négyszögben a belső szögek összege 360°
- h. Minden sokszögben a belső szögek összege 360° .
- i. Minden sokszögben a külső szögek összege 360° .
- j. Van olyan trapéz, amelyik deltoid is.
- k. Van olyan rombusz, amelyik nem trapéz.
- l. Minden trapézba írható mind a négy oldalát érintő kör.
- m. Minden négyszögbe írható mind a négy oldalát érintő kör.

Számítások (szögek, kerület, terület)

- F68.** Az ABC háromszög két oldala 7 és 9 cm. Mekkora lehet a harmadik oldala?
- F69.** Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. A legnagyobb oldala 6 cm, a másik két oldal különbsége 2 cm. **Mekkorák** a háromszög oldalai?
- F70.** **Van-e** olyan háromszög, melyben az oldalak aránya 4 : 7 : 11?
- F71.** Egy háromszögben $a = 3,4$ cm, $b = 6,2$ cm. **Mekkora** a c oldal, ha tudjuk, hogy c egész szám? $c =$
- F72.** Egy kétágú létra ágának hossza 2 méter. **Milyen magasra** lehet rajta mászni, ha a két ágát egymástól 1,4 méterre tudjuk kinyitni? (Feltételezzük, hogy a létra legtetejére lehet mászni.)
- F73.** Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója 10 cm. **Mekkora** a két befogó? **Mekkorák** a szögei?
- F74.** Egy derékszögű háromszögnek van két 45° -os szöge. A rövidebbik oldala 8 cm. **Mekkora** a területe?
- F75.** **Határozd meg** a 8 cm oldalú szabályos háromszög köré- és beleírható körének sugarát!
- F76.** **Határozd meg** a 8 cm oldalú szabályos háromszög területét!
- F77.** **Mekkora** a háromszög c oldala, ha $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, és $m_c = 2$ cm?
- F78.** Egy egyenlő szárú háromszög szára 12 cm, az alaphoz tartozó magassága 10 cm. **Határozd meg** a háromszög területét és kerületét!
- F79.** Egy háromszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3. **Mekkorák** az oldali és a területe, ha a középső oldala 10 cm?
- F80.** Derékszögű háromszög egyik szöge 30° , a hosszabbik befogója 7 cm. **Mekkora** a területe és a kerülete?
- F81.** Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 7 cm, a szarai 5 cm hosszúak. **Mekkora** a trapéz területe?
- F82.** Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 7 cm, a magassága 3,5 cm. **Mekkora** a trapéz kerülete és területe? **Mekkora** a trapéz átlója?
- F83.** **Mekkora** a deltoid területe és kerülete, ha átlói 12 cm és 4 cm, és a 4 cm-es átló harmadolja a másik átlót?
- F84.** Szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 44 cm, szára 17 cm és átlója 39 cm. **Mekkora** a kerülete és a területe?

Körökkel kapcsolatos feladatok

- F85.** Mekkora a 12 cm sugarú körben a 31 cm^2 területű körcikkhez mekkora középponti szög tartozik? **Mekkora** a cikkhez tartozó körív hossza?
- F86.** Egy körben a 10 cm hosszú húr a középponttól 3 cm-re van. **Mekkora** a kör sugara?
- F87.** Egy kör 24 cm^2 területű körcikkéhez 8,3 cm hosszú ív tartozik. **Mekkora** a kör sugara?
- F88.** Egy körgyűrű középkörének sugara 3,7 cm, a körgyűrű területe $42,7 \text{ cm}^2$. **Mekkora** a szélessége?

Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, szerkesztések

- F89.** Egy háromszög egyik oldalán fekvő szögeinek nagysága 22° és 82° . **Mekkora szöget zár be** egymással az ezzel az oldallal szemközti csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?
- F90.** Háromszög középvonalai 4 cm, 4 cm és 7 cm. **Mekkora** a háromszög kerülete és területe?
- F91.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6 \text{ cm}$, $m_a = 3,8 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$!
- F92.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 4 \text{ cm}$, $m_a = 3,7 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$!
- F93.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 5 \text{ cm}$, $m_a = 4 \text{ cm}$, $s_a = 5 \text{ cm}$ (az a oldalhoz tartozó súlyvonala)!
- F94.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 7 \text{ cm}$, $m_a = 6,1 \text{ cm}$, $R = 9 \text{ cm}$ (a köréírható kör sugara)!
- F95.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6 \text{ cm}$, $m_a = 3,8 \text{ cm}$, $m_b = 4 \text{ cm}$!
- F96.** **Szerkessz háromszöget**, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6 \text{ cm}$, $m_b = 4 \text{ cm}$, $m_c = 4,7 \text{ cm}$!
- F97.** **Szerkessz háromszöget**, ha adott két oldala (4 cm és 6 cm), és a harmadikhoz tartozó súlyvonal (4,7 cm)!

Gyakorló feladatok az epochazáróra

- F98.** Az n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma:
F99. Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek az összege:
F100. Hány oldalú az a szabályos sokszög, amelynek egy külső szöge 9° ? Hány átlója van?
F101. Mekkora a szabályos nyolcszög egyik külső szöge?
F102. Mekkora a szabályos hétszög egyik belső szöge?
F103. Mekkora a szabályos ötszög egyik belső szöge?
F104. Hány átlója van a kilencszögnek?
- F105.** Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala (a és b) és az a oldallal szemközti csúcsból kiinduló magasságvonal hossza.
F106. Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala (a), az adott oldalhoz tartozó magassága (ma) és az adott oldalon lévő egyik szöge (β).
F107. Szerkessz háromszöget, ha adott az A csúcsából kiinduló két oldal hossza és az A csúcsból kiinduló magasság hossza.
F108. Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala, és a másik két oldalhoz tartozó magassága!
F109. Szerkeszd meg egy háromszög beírt és köré írható körét!
F110. Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala, és a harmadikhoz tartozó súlyvonal!
- F111.** Egy háromszög egyik csúcsánál 35° -os, másik csúcsánál 65° -os szög található. Mekkora szöget zár be egymással a szemközti csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?
F112. Számítsd ki a háromszög területét, ha egyik oldala 5cm, és a másik két oldallal párhuzamos középvonala 3cm és 2,5cm!
F113. Egy egyenlőszárú háromszögben az alappal szemközti szög 80° . Mekkora szöget zár be az alappal a szárhoz tartozó magasság?
F114. Mekkora szöget zár be egymással egy háromszög két csúcsából kiinduló szögfelezője, ha a harmadik csúcsnál 48° szög található?
F115. Egy C csúcsánál derékszögű háromszög átfogója 16 egység, kisebbik befogója 8 egység. Milyen távol van egymástól az átfogón lévő magasságtalppont és a köré írható kör középpontja?

Számítások (szögek, terület, terület)

- F116.** Az ABC háromszög két oldala 5 és 11 cm. **Mekkora lehet** a harmadik oldala?
F117. Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. A legnagyobb oldala 5 cm, a másik két oldal különbsége 3 cm. **Mekkorák** a háromszög oldalai?
F118. **Van-e** olyan háromszög, melyben az oldalak aránya $3 : 9 : 12$?
F119. Egy háromszögben $a = 3,7$ cm, $b = 7,2$ cm. Mekkora a c oldal, ha tudjuk, hogy c egész szám? $c =$
F120. Egy kétágú létra ágának hossza 1,8 méter. Milyen magasra lehet rajta mászni, ha a két ágát egymástól 1,2 méterre tudjuk kinyitni? (Feltételezzük, hogy a létra legtetejére lehet mászni.)

- F121.** Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója 31 cm. Mekkora a két befogó? Mekkora a szögei?
- F122.** Egy derékszögű háromszögnek van két 45° -os szöge. A rövidebbik oldala 10 cm. Mekkora a területe?
- F123.** Határozd meg a 2 cm oldalú szabályos háromszög köré- és beleírható körének sugarát!
- F124.** Határozd meg a 15 cm oldalú szabályos háromszög területét!
- F125.** Mekkora a háromszög c oldala, ha $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, és $m_c = 3$ cm?
- F126.** Egy egyenlő szárú háromszög szára 18 cm, az alaphoz tartozó magassága 10 cm. Határozd meg a háromszög területét és kerületét! Mekkora a szárakhoz tartozó magassága?
- F127.** Egy háromszög belső szögeinek aránya $1 : 2 : 3$. Mekkora az oldali és a területe, ha a középső oldala 20 cm?
- F128.** Derékszögű háromszög egyik szöge 30° , a hosszabbik befogója 17 cm. Mekkora a területe és a kerülete?
- F129.** Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 6 cm és 16 cm, a szárai 8 cm hosszúak. Mekkora a trapéz területe?
- F130.** Szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 7 cm, a magassága 3,5 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe? Mekkora a trapéz átlója?
- F131.** Mekkora a deltoid területe és kerülete, ha átlói 12 cm és 4 cm, és a 4 cm-es átló negyedeli a másik átlót?
- F132.** **Szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 44 cm, szára 17 cm és átlója 39 cm. Mekkora a kerülete és a területe?

Körökkel kapcsolatos feladatok

- F133.** Mekkora a 20 cm sugarú körben a $71,2 \text{ cm}^2$ területű körcikkhez mekkora középponti szög tartozik? Mekkora a cikkekhez tartozó körív hossza?
- F134.** Egy körben a 21 cm hosszú húr a középponttól 11 cm-re van. Mekkora a kör sugara?
- F135.** Egy kör 30 cm^2 területű körcikkéhez 11,3 cm hosszú ív tartozik. Mekkora a kör sugara?
- F136.** Egy körgyűrű középkörének sugara 3,7 cm, a körgyűrű területe $42,7 \text{ cm}^2$. Mekkora a szélessége?

Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei, szerkesztések

- F137.** Egy háromszög egyik oldalán fekvő szögeinek nagysága 32° és 57° . Mekkora szöget zár be egymással az ezzel az oldallal szemközti csúcsból kiinduló szögfelező és magasságvonal?
- F138.** Háromszög középvonalai 5 cm, 5 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög kerülete és területe?
- F139.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 4$ cm, $m_a = 3,7$ cm, $\alpha = 60^\circ$!
- F140.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 7$ cm, $m_a = 5$ cm, $s_a = 6$ cm (az a oldalhoz tartozó súlyvonala)!
- F141.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $b = 7$ cm, $m_b = 6,1$ cm, $R = 9$ cm (a körírátható kör sugara)!
- F142.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6$ cm, $m_a = 4$ cm, $m_b = 4,3$ cm!
- F143.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6$ cm, $m_a = 4$ cm, $m_a = 4,7$ cm!
- F144.** Szerkessz háromszöget, ha a szokásos jelölésekkel $a = 6$ cm, $s_a = 4,5$ cm, $m_b = 4,7$ cm!
- F145.** Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala (4 cm és 6 cm), és a harmadikhoz tartozó súlyvonal (4,7 cm)!

Térgeometriai számítások

- F146.** Hány m^3 víz fér egy 80 cm átmérőjű, 110 cm magas körhenger alakú hordóba?
- F147.** Hány liter víz fér egy 3 m hosszú, 40 cm átmérőjű félhenger alakú itatóba?
- F148.** Egy 80 cm magas henger alakú vízmelegítő tartály űrtartalma 300 liter. Mekkora a tartály átmérője?
- F149.** Egy téglatest három élének aránya 4:7:11, tizenkét éle összesen 264 cm hosszú. Mekkora a felszíne, térfogata, testátlója?
- F150.** Szabályos háromszög alapú egyenes hasáb magassága 35 cm, oldallapjának átlója 37 cm. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?
- F151.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm, magassága ennek másfélszerese. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?
- F152.** Egy 36 cm^2 területű, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla egy oldallapjának területe az alaplap területének 75%-a. Mekkora a gúla felszíne? Mekkora a térfogata?
- F153.** Gyurmából olyan négyzet alapú gúlát formázunk, aminek az alapéle és a magassága is 4 cm. Hány cm^3 gyurmára van ehhez szükség?

F154. Mekkora annak az egyenes körkúpnak a felszíne és térfogata, amely alapkörének sugara 20 cm, nyílásszöge pedig derékszög?

F155. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 5 cm. Mekkora a magassága, ha térfogata 186 cm^3 ?

F156. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 7 cm. Mekkora az alkotója, ha térfogata 200 cm^3 ?

F157. Körkúp magassága 12 cm, alkotója 20 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

F158. Egy egyenes körkúp alkotója a magasságának háromszorosa, az alapkörének átmérője 12 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

F159. Töltsd ki a táblázatot, ha n a gúla alaplapja oldalainak száma, a a gúla alapéle, b az oldaléle, m_o az oldallap magassága!

	n	a	b	m_o	Felszín
a.)	3	12 cm		12 cm	
b.)	3		10 cm	6 cm	
c.)	4	5 cm	6 cm		
d.)	6	10 cm		12 cm	

F160. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 10 dm. Számítsd ki a gúla felszínét, ha oldallapjának magassága:

a. 8 dm; b. 4,5 dm; c. 2,6 dm!

F161. Mekkora a térfogata annak a szabályos gúlának, amelynek

- a. alaplapja 15 cm oldalú négyzet, magassága 18 cm;
- b. alaplapja 6 dm oldalú szabályos háromszög, magassága 3,8 dm;
- c. alaplapja 34 cm oldalú szabályos háromszög, magassága 50 cm;
- d. alaplapja 31 cm oldalú négyzet, oldaléle 40 cm;
- e. alaplapja 8 cm oldalú szabályos hatszög, oldaléle 12 cm?

Elméleti ismeretek

1. Milyen összefüggések érvényesek a háromszögek oldalaira és szögeire (belső és külső szögek is)?
2. Gyűjts össze mindent, amit a háromszög beírt és köré írt köréről tudsz!
3. Mi a súlyvonal? Milyen összefüggéseket tanultunk róla?
4. Mely sokszögeknél beszélünk magasságról? Gyűjtsd össze a háromszögek magasságvonaláról tanultakat!
5. Mit értünk középvonalon? Mit tudsz a háromszög, a paralelogramma és a trapéz középvonaláról?
6. Elevenítsd fel a Pitagorasz-tételt, és néhány alkalmazását!
7. Mit mond ki a Thalész tétel? Hogy hangzik a tétel megfordítása? Hol alkalmazzuk ezeket az összefüggéseket?
8. Fejezd ki a konvex sokszögek átlóinak a számát a csúcsok számának segítségével!
9. Mennyi a konvex sokszögek belső szögeinek az összege (a csúcsok számával kifejezve)? És a külső szögek összege?
10. Mit értünk szabályos sokszögön?
11. Fejezd ki a szabályos sokszögek belső és külső szögének nagyságát a csúcsok számának segítségével!
12. Gyűjtsd össze a speciális négyszögeket, és tulajdonságaikat! (belső és külső szögek, oldalak, átlók)
13. Sorold fel a tanult sokszögek és a kör kerületére és területére vonatkozó összefüggéseket!
14. Milyen nevezetes szögpárokat ismersz? (elnevezésük, helyzetük, nagyságuk)
15. Mit nevezünk érintőnégyszögnek? Mit tudsz róla?
16. Sorold fel tanult geometriai transzformációkat! Melyiknek milyen tulajdonságait ismertük meg?
17. Mit értünk tengelyes illetve középpontos szimmetrián? Sorolj fel olyan alakzatokat, melyek mindkét, vagy csak az egyik szimmetria tulajdonsággal rendelkeznek!