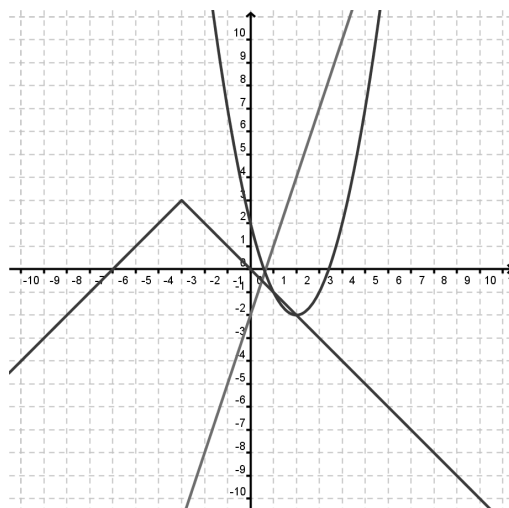


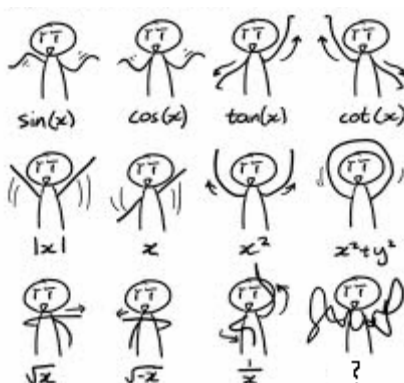


Második epochafüzet

Matematika 9. évfolyam

Tulajdonos:

.....



Tartalomjegyzék

Amit az epocha végére tudni kell	2
Halmazok.....	3
Intervallumok	6
Tájékozódás a koordináta-rendszerben	9
Függvények	13
Függvények tulajdonságai	16
Alapfüggvények	21
Lineáris függvény	21
A másodfokú függvény	24
Az abszolútérték függvény	25
A négyzetgyökfüggvény.....	26
Lineáris törtfüggvények.....	27
*** Az egészrész-, a törtrész- és az előjel-függvény.....	28
Függvény-transzformációk.....	31
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	43
Statisztika	45
A statisztika alapjai.....	45
Adatok gyűjtése, rendszerezése	46
Adatok szemléltetése – diagramok	48
Statisztikai mutatók – középértékek	53
Feladatgyűjtemény	58
Halmazok.....	58
Intervallumok	60
Tájékozódás a koordináta-rendszerben	62
Függvények	64
Függvény-transzformációk.....	68
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	72
Gyakorló feladatok	74
Statisztika	76
Gyakorló feladatok az epochazáráshoz.....	80

Amit az epocha végére tudni kell

Fogalmak: Átlag, módusz, medián, gyakoriság és relatív gyakoriság. Kördiagram, oszlopdiagram, osztályközös gyakoriság. Intervallum, számegyenes, koordináta rendszer. Hozzárendelés, függvény, kölcsönösen egyértelmű függvény. Értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, tengelymetszet, szélsőérték, függvény menete, helyettesítési érték, lineáris függvény, másodfokú függvény, abszolút érték függvény, $\frac{1}{x}$ függvény, alapfüggvény, függvénytranszformáció

Összefüggések: Halmazok elemeinek egymáshoz rendelése, hozzárendelések egyértelműsége, ábrázolása.

Alapfüggvények: lineáris, abszolút érték, másodfokú, és $\frac{1}{x}$ függvények hozzárendelési szabálya, ábrázolása koordináta-rendszerben. Függvény képe.

Eljárások: Összefüggések leolvasása grafikonokról, illetve adatok ábrázolása kör- és oszlopdiagramon. Osztályközös gyakorisági táblázat és diagram készítése. Hozzárendelések ábrázolása koordináta-rendszerben, összetartozó értékpárok leolvasása, számítása, függvények vizsgálata (ÉT, ÉK, maximum, minimum, tengelymetszet, zérushely, menet, nevezetes pontok), alapfüggvények transzformációi. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

Az epocha értékelése:

Az epocha végső százalékos eredményébe

- 70%-ot számít az epochazáró dolgozat
- 15% - 15%-ot a résztesztek
- 10%-ot az órai munka és a házi feladatok

A százalékos eredmény átváltása érdemjegyre:

0% - 39%	nullás (0)
40% - 54%	elégséges (2)
55% - 69%	közepes (3)
70% - 84%	jó (4)
85% - 100%	jeles (5)

Halmazok

1. Kifejezéseket, fogalmakat gyűjtöttünk össze. Mindegyik mellé **írd oda** mindazt, ami eszedbe jut róla!
 - a. Halmaz
 - b. Venn-diagramm
 - c. Részhalmaz
 - d. Két halmaz metszete
 - e. Két halmaz uniója
 - f. Két halmaz különbsége
 - g. Számhalmazok
 - h. Természetes szám
 - i. Racionális szám
 - j. Valós szám
2. Adott két halmaz:
 $A := \{30\text{-nál nem kisebb természetes számok}\}$
 $B := \{20\text{-nál nem kisebb és } 50\text{-nél kisebb természetes számok}\}$
Sorold fel azokat az elemeket, amelyek
 - a. 3-mal oszthatók és elmei mindkét halmaznak;
 - b. 5-tel oszthatók és elemei $A \cap B$ -nek;
 - c. 4-gyel oszthatók és nem elemei $A \cap B$ -nek;
 - d. 10-zel oszthatók és elemei $A \setminus B$ -nek;
 - e. sem 3-mal, sem 5-tel nem oszthatók, és elemei $B \setminus A$ -nak;
 - f. 3-mal vagy 7-tel oszthatók, és elemei az $A \cup B$ -nek.
3. Legyen $K := \{\text{kétjegyű számok}\}$ és $L := \{\text{négyzetszámok}\}$ halmaza.
Igaz-e, hogy
 - a. a K halmaznak 90 eleme van;
 - b. a $K \setminus L$ halmaznak 5 eleme van;
 - c. nincs olyan eleme a K -nak, ami osztható lenne 3-mal, 5-tel és 7-tel;
 - d. van olyan eleme K -nak, amely osztható 3-mal, 6-tal és 10-zel;
 - e. a $K \cap L$ üres halmaz;
 - f. a $K \cup L$ halmaznak végtelen sok eleme van.

A válaszaidat **indokold!**

4. Legyen $A := \{\text{egyjegyű prímszámok}\}$.

Igaz-e, hogy

- a. az A halmaz elemeinek száma megegyezik a 27 osztóinak számával;
- b. az A halmaznak 4 egyelemű részhalmaza van;
- c. van olyan részhalmaza az A -nak, amelynek 4 eleme van;
- d. az A halmaznak hat négyelemű részhalmaza van;
- e. az A halmaznak 15 részhalmaza van?

A válaszaidat **indokold!**

5. **Olvasd el**, és ahol hibát találsz, **javítsd ki!**

A „halmaz” hasonló értelmű a „csoport”, az „együttes”, a „közösség” szavakkal.

Tehát: halmazt alkotnak egy felsorolás vagy valamely egyértelműen meghatározható közös tulajdonság alapján összetartozó dolgok.

Pl.: Magyarország városai, vagy az összes könyved, vagy az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok, vagy a fekete hajúak.

Halmazt kétféleképpen adhatunk meg:

- felsoroljuk az elemeit (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);
- leírjuk azt a közös tulajdonságot, amelynek alapján az elemek halmazt alkotnak (pl.: Magyarország városai).

Halmazok jelölése

A halmazok elnevezésére az *ábécé* nagybetűit használjuk. Az elemek összetartozását kapcsos zárójel jelöli.

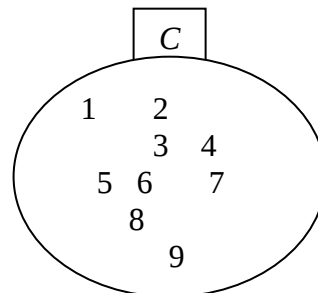
Pl.: $A := \{\text{Magyarország városai}\}$

$B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$C := \{10 - \text{nél kisebb pozitív egyész számok}\}$

Halmazok ábrázolása

A halmazokat általában Venn-diagrammal ábrázoljuk.



Halmazok elemei

A halmazhoz tartozó dolgok a halmaz elemei.

Amikor az elemek felsorolásával határozzuk meg a halmazt, könnyű eldönteni valamely dologról, hogy eleme-e a halmaznak, azaz hozzátartozik-e az adott halmazhoz, vagy sem. Ha valamilyen jellemző tulajdonság segítségével adjuk meg a halmazt, előfordulhat, hogy egy dologról nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy a halmazhoz tartozik-e vagy sem. Ilyen tulajdonság lehet például a „szőke”, a „magas” stb. Ezért olyan tulajdonságot, ismertetőjegyet kell választani, amely alapján egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy egy adott dolog rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal, vagy sem.

Azt, hogy valamely elem a halmazhoz tartozik, $\in$ -vel jelöljük.

Pl.: $2 \in C$, de $13 \notin C$; (13 nem eleme C -nek).

Két halmaz egyenlősége

Két halmazt egyenlőnek mondunk, ha az elemei megegyeznek.

Pl.: $B = C$, ha $B := \{a \text{ 60 osztói}\}$ és $C := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
és $A \neq D$, ha $A := \{a, b, c, d\}$ és $D := \{a, a, b, b, b, c, d\}$, vagy
 $E = F$, ha $x \in A \Leftrightarrow x \in D$.

Részhalmaz

Egy halmaz részhalmaza egy másik halmaznak, ha a halmaz minden eleme a másik halmaznak is eleme.

Jelölése pl.: $N \subset Q$, $\{ \} \subset A$, és $N \subset Z^+$; de $Q^+ \not\subset Z$ ($\not\subset$ olvasd: nem része).

Műveletek halmazokkal*I. Halmazok közös része*

Két vagy több halmaz közös elemeinek halmazát az adott halmazok metszetének vagy közös részének nevezzük. Jelölése: $\cap$.

Pl.: $A := \{\text{Magyarország városai}\}$;
 $F := \{\text{A világ fővárosai}\}$;
 $A \cap F = \{\text{Budapest}\}$.

II. Halmazok egyesítése, uniója

Két vagy több halmaz összes elemeinek halmaza alkotja az adott halmazok egyesítését vagy unióját. Jelölése: $\cup$.

Pl.: ha $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $Y = \{4, 5, 6\}$, akkor $X \cup Y := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

III. Halmazok különbsége

Az A és B halmaz különbségét az A -nak azon elemei alkotják, amelyek nem elemei B -nek. Jelölése: $\setminus$

Pl.: $A := \{3\text{-mal osztható számok}\}$;
 $F := \{4\text{-gyel osztható számok}\}$;
 $A \setminus F = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 \text{ stb.}\}$.

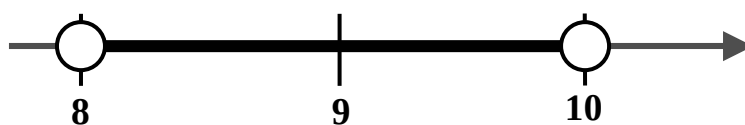
Intervallumok

A valós számokat és az egyenes pontjait megfeleltethetjük egymásnak, ha az egyenesen kijelölünk egy kezdőpontot, egy egységet és egy haladási irányt. Az így megjelölt egyenest **valós száme egyenesnek** mondjuk.

Ha a valós számok egy olyan részéről akarunk beszélni, amelyek a száme egyenes egy bizonyos darabján helyezkednek el, **intervallumról** beszélünk. A száme egyenes egy-egy részét eddig is meg tudtuk adni egyenlőtlenségek segítségével, most egy más jelöléssel és elnevezéssel ismerkedünk meg.

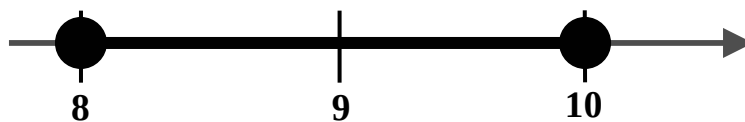
Ha azokról a valós számokról akarunk beszélni, amelyek nagyobbak, mint 8, de kisebbek, mint 10, azt eddig így jelöltük: $8 < x < 10$, ahol x valós szám, vagy a halmazjelölést használva: $\{8 < x < 10 \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Ezek a számok a száme egyenesen így helyezkednek el:

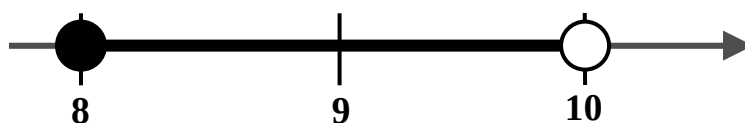


Új jelölésünkkel ez a 8–10 **nyílt intervallum**: $]8;10[$, és azért mondjuk nyíltnak, mert a „végei” nem tartoznak bele.

Ha az intervallum jelölést használva a $8 \leq x \leq 10$ egyenlőtlenségnek megfelelő számokat akarjuk leírni, akkor az ilyen lesz: $[8;10]$ és a 8–10 **zárt intervallumról** beszélünk. Azért zárt, mert a „végei” is beletartoznak, amit a szögletes zárójellel jelölünk. Ezt a száme egyenesen így jelölnénk:



Beszélhetünk **fél zárt (avagy fél nyílt) intervallumról** is. Az alábbi példák ezt mutatják: $8 \leq x < 10$ megfelelője $[8;10[$ vagy $[8;10)$.



A száme egyenes egy-egy félegyenesét is meg lehet adni intervallummal, a ∞ (végtelen) jel segítségével: Ha az $8 \leq x$ számokat akarjuk jelölni, annak a $[8; \infty[$ intervallum felel meg. A $\pm \infty$ intervallum-„végeket” mindig nyíltnek tekintjük. Így az $x < 8$ egyenlőtlenségnek megfelelő intervallum nyílt, és így jelöljük: $] - \infty; 8[$ vagy $(- \infty; 8[$.

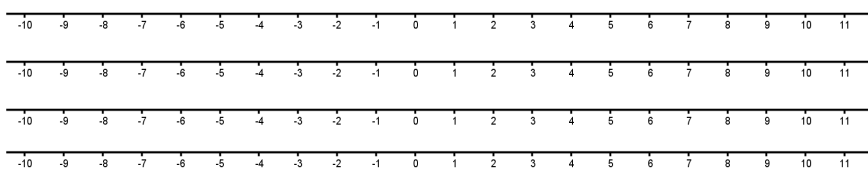
6. Jelöld egy-egy számegyenesen az alábbi intervallumokat:

a. $[2; 6]$

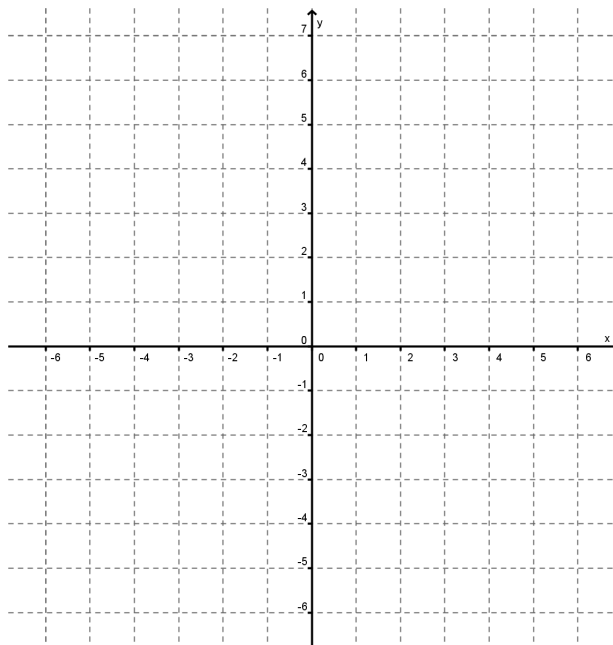
b. $[-3; 8[$

c. $]0,3; 1,1[$

d. $(-\infty; 5)$



7. Jelölje G a koordináta-rendszer azon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $x \in [-1; 2]$, $y \in [2; 4]$. Jelöld a halmaz elemeit a koordináta-rendszerben!



8. Ábrázold számegyenesen a valós számok azon részhalmazát, amely megfelel az alábbi feltételnek! Add meg a részhalmazokat intervallum jelöléssel is!

a. $x \leq 8$

b. $-1 \leq x \leq -0,5$

c. $7 < x$

d. $x < 1$

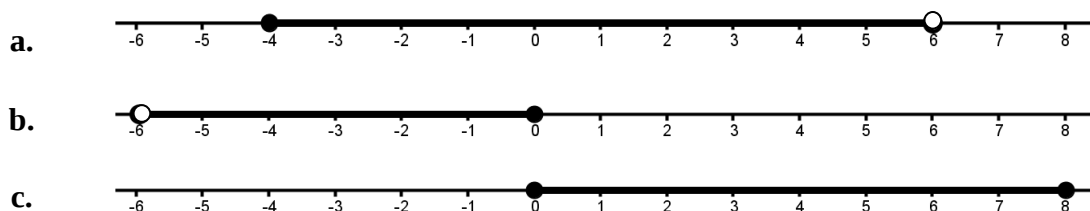
e. x nem kisebb háromnál

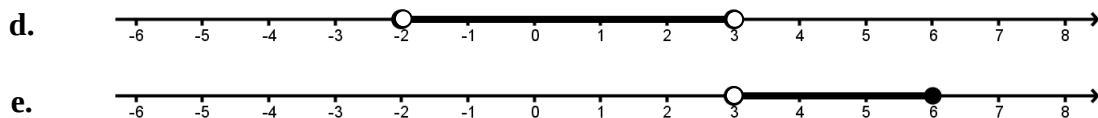
f. x nem nagyobb -1 -nél

g. x legalább 1 és legfeljebb 6

h. x legalább 1 és legfeljebb -1

9. Add meg intervallum jelöléssel és egyenlőtlenséggel a számegyenesen látható intervallumokat!



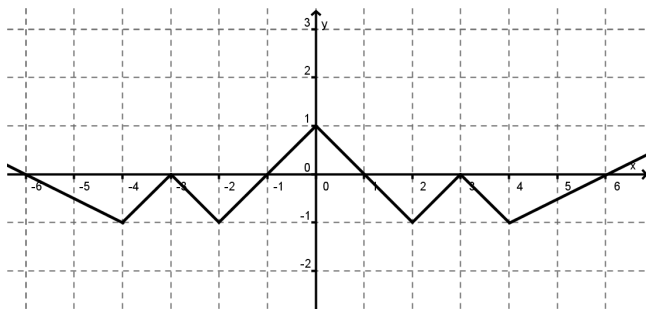
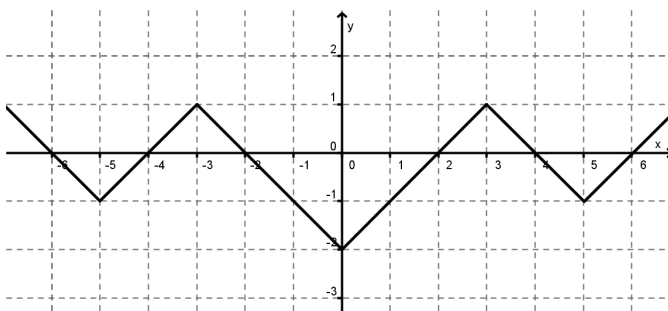
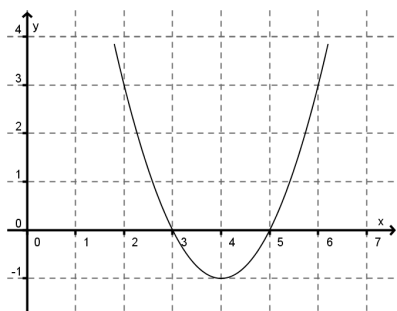


A megoldáshalmazokat A, B, C, D, E -vel jelölve **add meg** a következő intervallumokat:
 $A \cap B$ $A \cap D$ $B \cap C$ $A \cup C$ $B \cup C$ $A \cup D$ $A \cap C \cap D$ $D \cup E$ $B \cap E$

10. **Add meg** a következő intervallumok metszetét, és ábrázold számegyenesen!

- | | |
|---|---|
| a. $] -5; 1] \cap [1; 6[$ | b. $] -5; 1[\cap [1; 6[$ |
| c. $] -5; 1[\cap] 1; 6[$ | d. $] -4; 3[\cap [0; 4[$ |
| e. $] -5; 3] \cap] -1; 1[$ | f. $[0; 7[\cap [-5; 3]$ |
| g. $] -5; 3] \cap [-1; 6[\cap [-7; 4]$ | h. $[-1; 0[\cap [-5; 2] \cap [-4; 7]$ |

11. **Add meg**, hogy a következő grafikonoknak megfelelő függvények milyen x értékekre vesznek fel **nemnegatív** értéket!



12. **Ábrázold** számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldását, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza! **Add meg** a megoldáshalmazokat intervallum jelöléssel is!

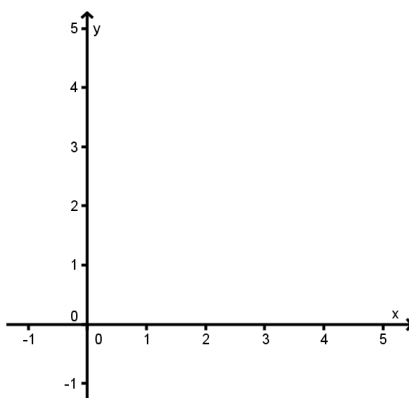
- | | | |
|----------------------|--------------------------|-------------------|
| a. $2x - 3 \geq 5$ | b. $4 - x \leq 9$ | c. $x - 1 < 2x$ |
| d. $6x + 4 > 2x - 8$ | e. $1 - 2x \geq 3x + 16$ | f. $7 + 5x < -2x$ |

13. Az előző feladatban szereplő megoldáshalmazokat rendre A, B, C, D, E, F -fel jelölve add meg intervallum jelöléssel a következő halmazokat, és ábrázold számegyenesen!

$$A \cap B \quad B \cap E \quad C \cap F \quad A \cap F \quad B \cup C \quad E \cap D \quad A \cap C \cap D \quad B \cap F \cap C$$

Tájékozódás a koordináta-rendszerben

14. Adott a síkon két egymásra merőleges számegyenes – x és y –, amelyek az O pontban metszik egymást (Descartes-féle koordináta-rendszer).



Jelöld be színessel azokat a síkbeli pontokat, amelyeknek a megadott számegyenesestől mért távolsága

- | | | | |
|-----------------|--------------------|-----------------|----------------------|
| a. $d_{px} = 3$ | b. $d_{px} \leq 2$ | c. $d_{px} > 1$ | d. $d_{px} \geq 1,5$ |
| e. $d_{py} = 1$ | f. $d_{py} \leq 3$ | g. $d_{py} > 2$ | h. $d_{py} \geq 2,5$ |

Olvasd le az a. és e. feladatban kapott ponthalmazok metszéspontjának koordinátáit:
 $P(\quad ; \quad)$

Ancsi szerint a metszéspont $(3;1)$, Pali szerint a pont jelzőszámai $(1;3)$. **Kinek van igaza?**

Jegyezd meg!

A koordináta-rendszer síkjában fekvő valamennyi pontot ábrázolni lehet egy rendezett számpár segítségével. A rendezett számpár első tagja az y tengelytől, a második tagja pedig az x tengelytől mért előjeles távolságot jelenti. És megfordítva: ha megadunk egy rendezett számpárt, akkor mindig találunk a koordináta-rendszer síkjában egy olyan pontot, amelyet ez a rendezett számpár jellemez.

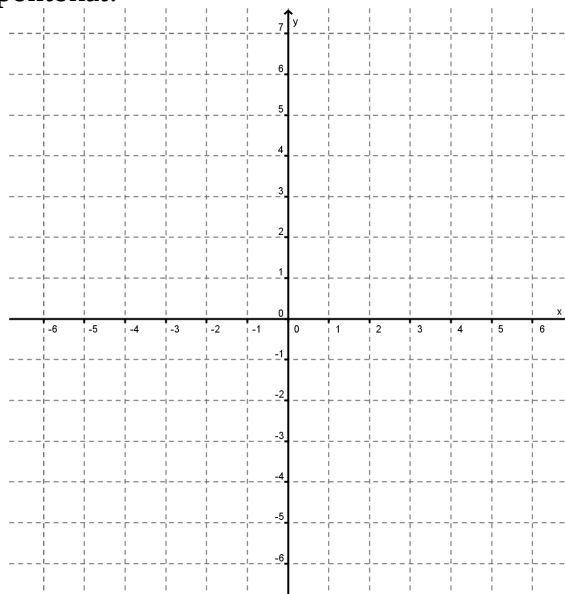
15. **Ábrázold** koordináta-rendszerben a megadott pontokat!

- a. $A(-5;2)$ b. $B(4;3)$ c. $C(-3;5)$
 d. $D(4;-1)$ e. $E(0;3)$ f. $F(0;-2)$
 g. $G(-4;0)$ h. $H(1;0)$

Tükrözd a pontokat az x tengelyre, és olvasd le a kapott pontok koordinátáit! **Mit tapasztalsz?**

Tedd meg ugyanezt az y tengely, az origó és a koordináta-rendszer szögfelezőire vonatkozóan!

Fogalmazd meg tapasztalataidat!



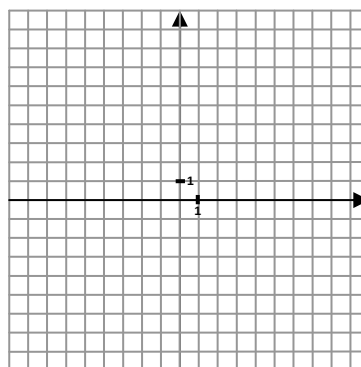
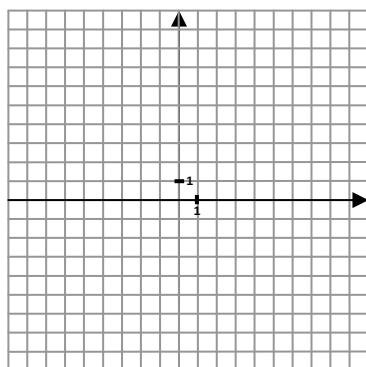
16. **Milyen alakzatot** határoznak meg azok a $P(x;y)$ pontok, amelyekre

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a. $1 \leq x \leq 3$ és $-2 \leq y \leq 2$ | b. $-1 < x \leq 4$ és $-2 < y \leq 4$ |
| c. $x = 3$ és y bármilyen érték | d. $y = 2$ és x bármilyen érték |
| e. $-1 \leq x \leq 1$ és y bármilyen érték | f. $ x < 3$ és y bármilyen érték |
| g. $x^2 = 1$ | h. $(x-3)^2 = 4$ |
| i. $(x-2)(x+1) = 0$ | j. $(x+3)(y-4) = 0$ |
| k. $x^2 + y^2 = 0$ | l. $x^2 + y^2 = 25$ |
| m. $x = y$ | n. $ x = y $ |
| o. $x^2 + y^2 = -4$ | |

17. **Ábrázold** derékszögű koordináta-rendszerben a következő ponthalmazokat!

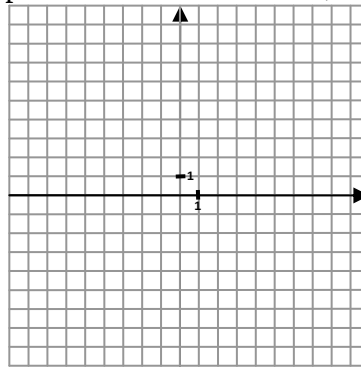
- a. $A := \{-2 \leq x \leq 2\}$
 $B := \{-3 \leq y \leq 3\}$

Színessel jelöld az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokhoz tartozó pontokat!



b. $A := \{x \mid x = 3\}$, $B := \{y \mid y = 2\}$

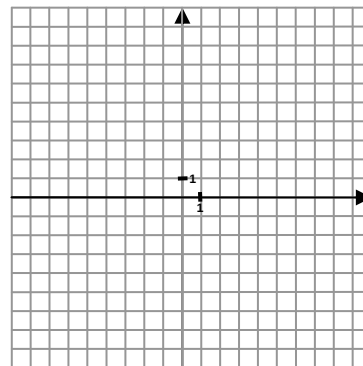
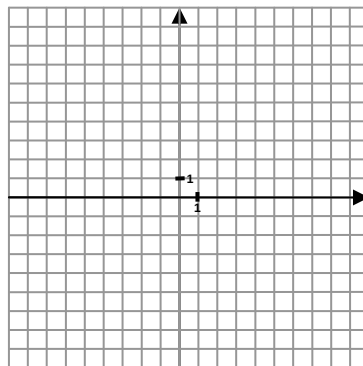
Olvasd le azoknak a P pontoknak a koordinátáit, amelyekre $P \in A \cap B$!



18. **Ábrázold** a koordináta-rendszerben azokat a $P(x; y)$ koordinátájú pontokat, amelyekre:

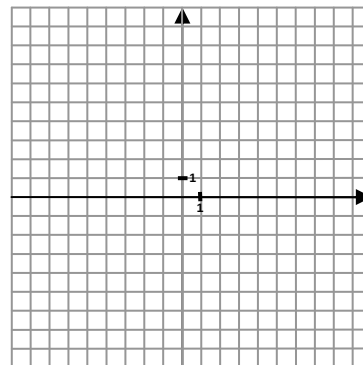
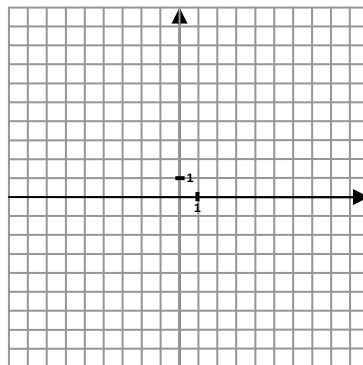
$1 \leq x < 2$ és $-2 \leq y \leq 3$

$-1 < x \leq 3$ és $-5 < y < -3$



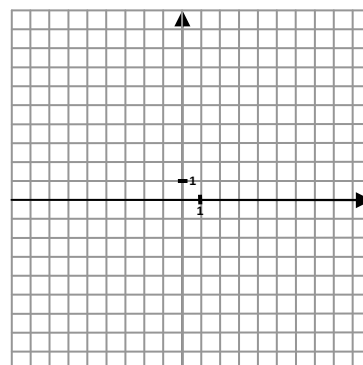
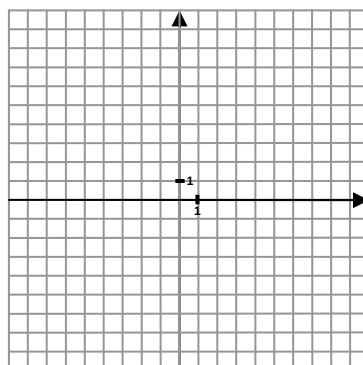
$-3 < x < 2$ vagy $-1 \leq y \leq 2$

$x > 2$ és y bármely érték

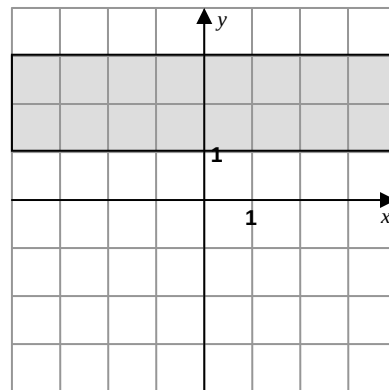
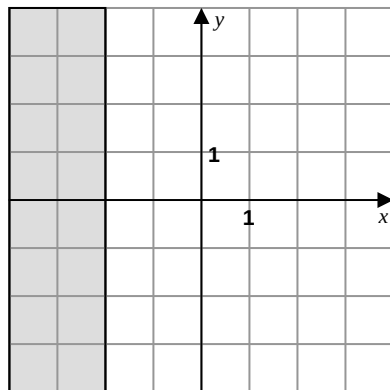
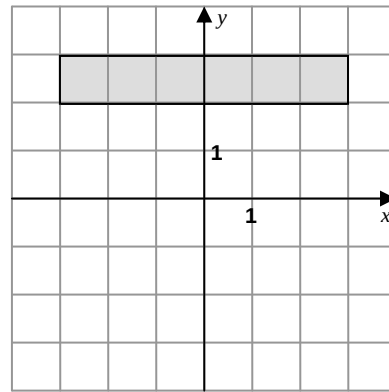
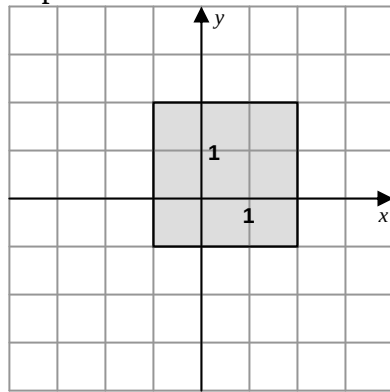


$-1 < x < 1$ és y bármely érték

x bármely érték és $|y| \leq 2$



19. Ábrázoltuk a ponthalmazokat. **Jellemezd** a halmazok elemeinek koordinátáit!

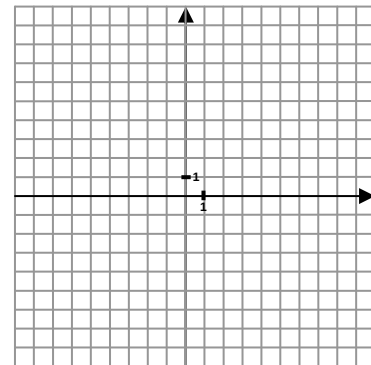
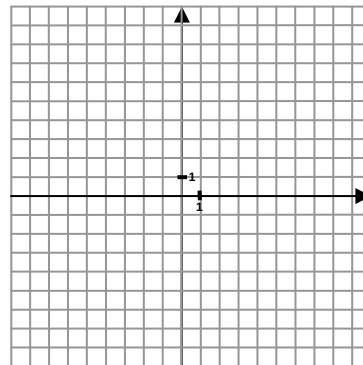
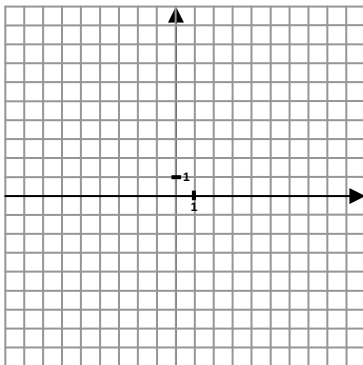


20. **Ábrázold** koordináta-rendszerben azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyekre teljesül, hogy

$$x = y$$

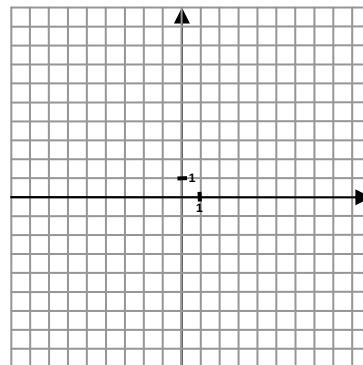
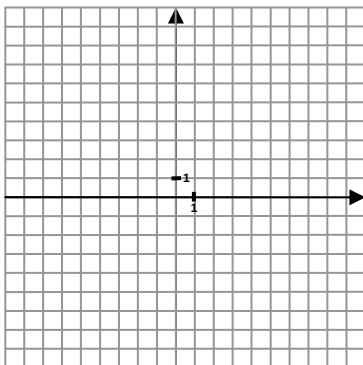
$$x = -y$$

$$|x| = |y|$$



$$(x-1)(y+3) = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 0$$



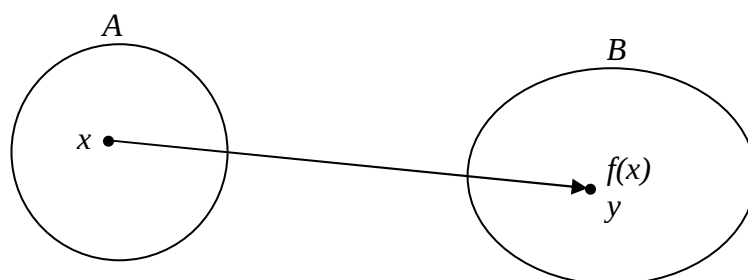
Függvények

Adott két nem üres halmaz: A és B . Ha az A halmaz **minden** eleméhez a B halmaz **pontosan egy** elemét rendeljük, ezt a hozzárendelést **függvénynek** nevezzük.

A függvényeket kis betűkkel szokás jelölni: $f, g, h \dots$

Az A halmaz neve *tárgyhalmaz*, elemeit x -szel jelöljük.

A B halmaz elemeit jelöljük $f(x)$ -szel. (Szokás y -nal is jelölni.) A B halmaz neve *képhalmaz*.



Az $f(x)$ -et az f függvény x helyen felvett értékének vagy helyettesítési értékének nevezzük.

Az f függvény a 2-höz az $\frac{1}{2}$ -et rendeli. Ezt úgy jelöljük, hogy $f(2) = \frac{1}{2}$, vagy $x = 2$ -nél $y = \frac{1}{2}$.

Az **értelmezési tartomány** (szokásos jelölése: É.T. vagy D_f) a tárgyhalmaz azon elemeinek halmaza, amelyekre a hozzárendelési utasítás értelmezve van. Függvények esetében ez maga az A halmaz.

Az **értékkészlet** (szokásos jelölése: É.K. vagy R_f) a képhalmaz azon elemeinek a halmaza, amely értékeket a függvény felvesz. Ez lehet a teljes képhalmaz is. Elemei a függvényértékek.

Függvények megadásakor meg kell adni az értelmezési tartományt, vagyis az A halmazt, és a tárgyhalmazt, vagyis a B halmazt, valamint a hozzárendelési szabályt.

Például:

Az f függvény minden 10-nél kisebb pozitív egész számhoz hozzárendeli a reciprokát. Ezt így jelöljük:

$$f: \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 < x < 10\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}.$$

21. **Sorold fel** a fenti példában szereplő f függvény *értelmezési tartományának* elemeit!

22. **Sorold fel** a fenti példában szereplő f függvény *értékkészletének* elemeit!

23. **Add meg** a következő értékeket!

$$f(4) =$$

$$f(5) =$$

$$f(8) =$$

$$\text{Mennyi az } x, \text{ ha } f(x) = \frac{1}{9} ? x =$$

$$\text{És ha } f(x) = \frac{1}{4} ? x =$$

24. A következő hozzárendeléseknél **add meg** az alap- és képhalmazt! **Vizsgáld meg**, hogy a hozzárendelés függvény-e! Válaszodat **indokold**!
- Minden emberhez hozzárendeljük a telefonját.
 - Minden emberhez hozzárendeljük a táskáját.
 - Minden számhoz hozzárendeljük a reciprokánál kettővel nagyobb számot.
 - Minden számhoz hozzárendeljük a reciprokánál egyel kisebb számot.
 - Minden egész számhoz hozzárendelem az abszolút értékének felénél kettővel kisebb számot.
 - Minden számhoz hozzárendelem az ellentettjének a reciprokát.
 - Minden egész számhoz hozzárendelem az abszolút értékének kétszeresénél kettővel nagyobb számot.
 - Minden számhoz hozzárendelem az abszolút értékének a reciprokát.
25. **Add meg** a következő függvényeket képlettel! ($f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$)
- Minden racionális számhoz hozzárendeli a szám felét.
 - Minden 30-nál kisebb természetes számhoz hozzárendeli az egész számsorban a bal szomszédját.
 - Minden egész számhoz hozzárendeli a szomszédok különbségének az abszolút értékét.
 - Minden egész számhoz hozzárendeli a szomszédok szorzatát.
 - Minden természetes számhoz hozzárendeli a gyökének a kétszeresét.
 - Minden pozitív egész számhoz hozzárendeli a kétszeresénél 5-tel nagyobb számot.
 - Minden egész számhoz hozzárendeli az abszolút értékénél egyel nagyobb számot.
 - Minden számhoz hozzárendeli az ellentettjének a reciprokát.
 - Minden számhoz hozzárendeljük a reciprokánál kettővel nagyobb számot.
 - Minden számhoz hozzárendeljük a nála kettővel nagyobb szám reciprokát.
26. Panni szerint az $x \mapsto 3x-1$ és az $f(x)=3x-1$ kifejezések egyértelműen határozzák meg a függvényt. **Igaza van-e?** (Válaszodat indokold!)
27. Javítsd ki, azaz **add meg helyesen** a következő függvényeket!
- $x \mapsto \frac{1}{x-1}$
 - $x \mapsto \frac{x}{x+3}$
 - $x \mapsto -4|x|$
 - $x \mapsto x^2$
 - $x \mapsto x^3 - 1$
 - $x \mapsto \sqrt{x}$

MEGÁLLAPODÁS

Ha a hozzárendelési szabályt képlettel adjuk meg, és mást nem mondunk, akkor függvény értelmezési tartománya az összes olyan valós számokból álló halmaz, amelyekre a kijelölt műveletek elvégezhetők, vagyis az értelmezési tartomány ebben az értelemben a "lehető legbővebb" halmaz, azaz a tárgyhalmaz.

28. Javítsd ki!

	É.T.	Helyettesítési érték		
$f(x) = \frac{3}{x-1}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$	$f(0) = -3$	$f(-2) = 1$	$f(4) = -1$
$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$g(-2) = 5$	$g(1) = 0$	
$f: x \mapsto \frac{3x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 1\}$	$f(1) = 0$	$f(-2) = 4$	
$h: x \mapsto x-3 - 2 x+1 $	$x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$h(-5) = 0$	$h(6) = 2$	
$k(x) = 4x^2$	$x \in \mathbf{R}^+$	$k(-3) = -36$	$k\left(\frac{1}{2}\right) = 2$	
$g: x \mapsto \sqrt{x}$	$x \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$	$g(-9) = 3$	$g(4) = 2$	$g(0) = 0$
$n: x \mapsto \frac{2x^2-1}{5-x}$	$x \in \mathbf{R}$	$n(-2) = 1$	$n(5) = 0$	
$m: x \mapsto \frac{-2 x-1 }{x+2}$	$x \in \mathbf{R}$	$m(-2) = 0$	$m(4) = -1$	

29. A következő függvények közül válogasd ki azokat, melyeknek az értékkészletéhez hozzátartozik a 11!

Adj is meg olyan értelmezés tartománybeli elemet, melyhez a függvény a 11-et rendeli!

a. $x \mapsto x^2 - 14 \quad x \in \mathbf{N}$

b. $x \mapsto x - 2 \quad x > 10$

c. $x \mapsto |x+3| \quad x \in]3; 10]$

d. $x \mapsto x + 4 \quad x \in [3; 7]$

e. $x \mapsto 2x + 3 \quad x \in \mathbf{R}$

f. $x \mapsto |-x+5| \quad x \in]-2; 11]$

g. Tetszőleges téglalaphoz a területének mérőszámát rendeljük.

h. A labdarúgó-bajnokságon minden csapat egyszer játszik minden csapattal. A csapatok számához a mérkőzések számát rendeljük.

i. $x \mapsto \frac{2}{x+1} \quad x > 0$

j. $x \mapsto -x + 4 \quad x \in \mathbb{N}^+$

k. $x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \quad x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$

l. $x \mapsto 5x + 2 \quad x \in \mathbb{N}^+$

Függvények tulajdonságai

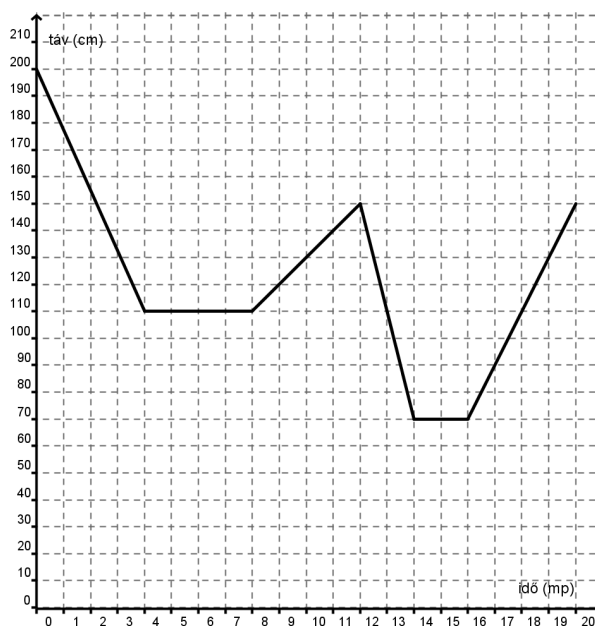
30. Két egyenlő magasságú gyertya közül a vékonyabbik kétszer olyan gyorsan ég le, mint a vastagabbik. A grafikon a két gyertya együttes hosszát mutatja az idő függvényében.

- Mennyi ideig égett csak a vastagabbik gyertya?
- Hány percre nem égett egyik gyertya sem a vizsgált időszakban?
- Mennyi idő alatt égett le a vékonyabbik gyertya?
- Eredetileg milyen magasak voltak a gyertyák?
- Mikor fogyott el mindkét gyertya?

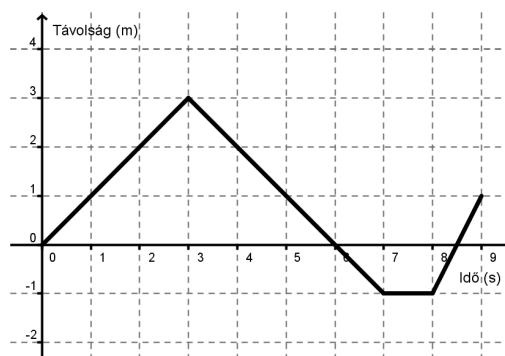


31. Az asztal fölé 2 méteres magasságba egy lámpát függesztettek, ezen egy pók lóg. A grafikon a pók asztaltól való távolságát ábrázolja az idő függvényében.

- Összesen hány másodpercig mászott felfelé a pók a megfigyelés ideje alatt?
- Hány centiméterre távolodott el maximálisan a pók a lámpától?
- Melyik szakaszon ment a leggyorsabban a pók?
- Hány másodpercig volt a pók közelebb a lámpához, mint az asztalhoz?
- Mikor volt a legalacsonyabban a pók?



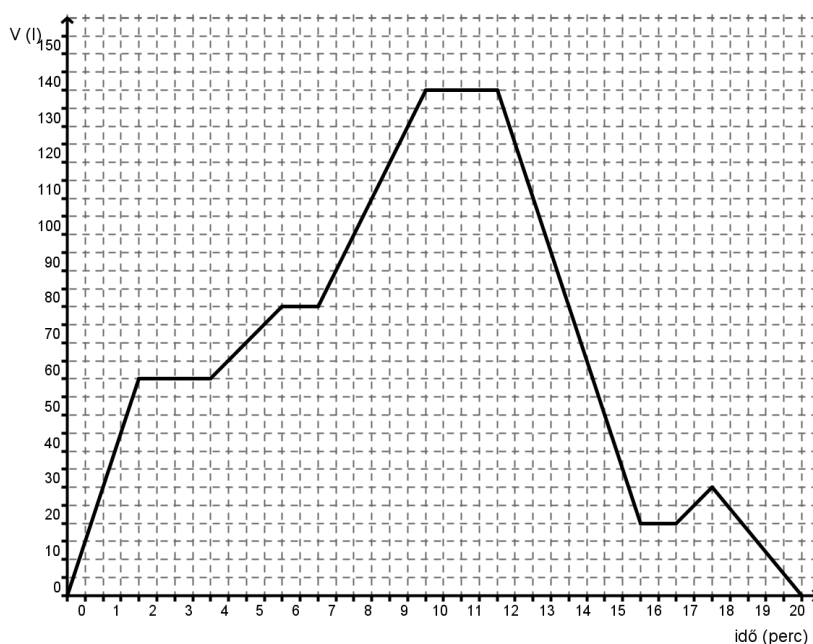
32. András és Béla 60 méteres távon versenyt futnak. A grafikon azt mutatja, hogy az indulástól számított 9 másodperc során András a verseny közben hány méterrel előzi meg Bélát.



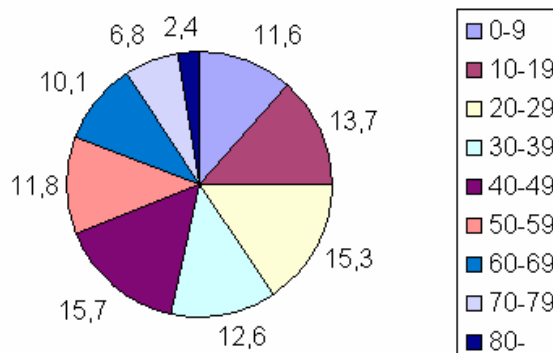
- Összesen hány másodpercig vezetett Béla a verseny során?
- Ki nyerte a versenyt?
- Mikor futott a két fiú egyforma sebességgel?
- Hány másodpercig futott Béla gyorsabban, mint András?
- Mikor futott gyorsabban András?

33. Egy kádba két csapból engedhető a víz, és a lefolyón ereszthető le. Az egyik csap vízhozama kétszerese a másik csapénak. A kádban lévő víz mennyiségét mutatja a grafikon az idő függvényében.

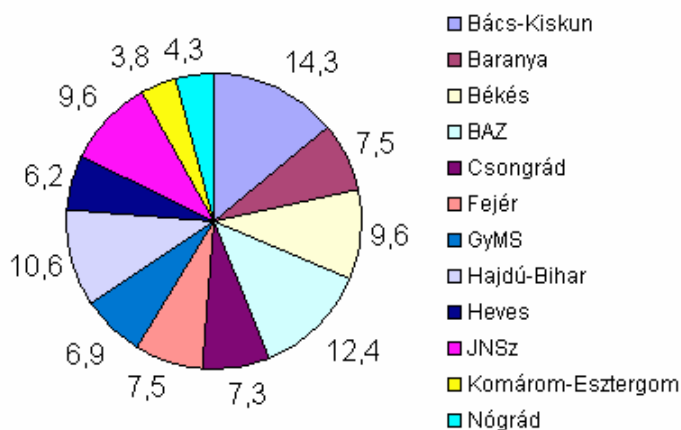
- Hány liter vizet engedünk összesen a kádba?
- Mennyi víz folyik ki az egyik, mennyi a másik csapból egy perc alatt?
- Mennyi ideig volt nyitva legalább az egyik csap?
- Mikor volt a kádban pontosan 80 liter víz?



34. A következő diagram a népesség korcsoportok szerinti százalékos megoszlását mutatja 1996-ban. Olvasd le a legkisebb és legnagyobb értékeket! **Határozd meg**, hol/mikor (melyik korcsoportnál) veszik fel ezeket az értékeket!

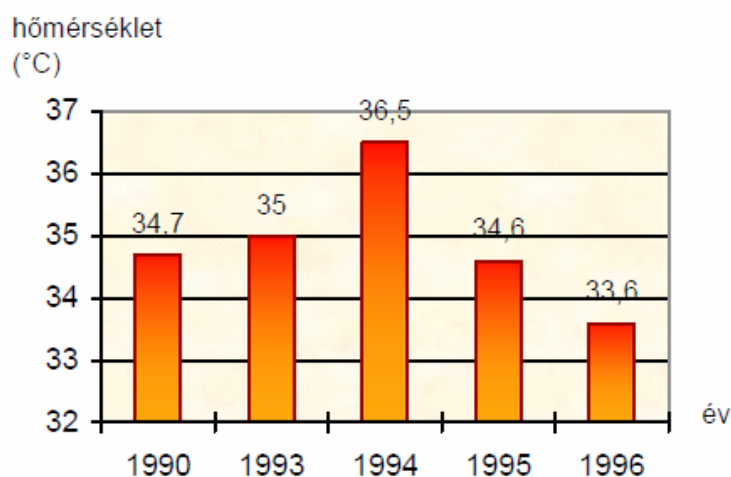


35. A következő diagram Magyarország 12 megyéjének területi eloszlását mutatja %-ban. **Olvasd le**, melyik megyének a legkisebb és melyiknek a legnagyobb a területe, és add meg a területét is!

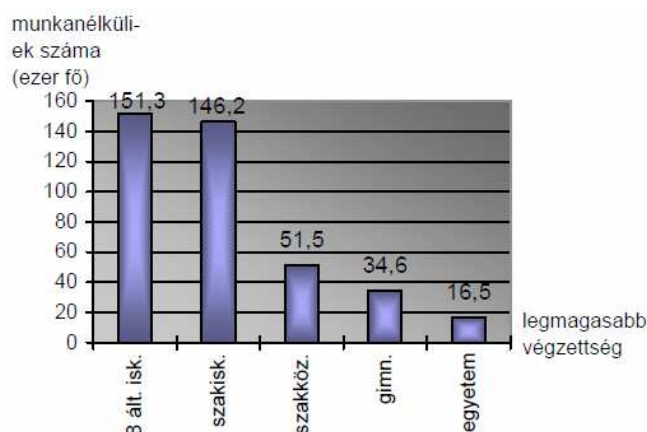


36. **Olvasd le** a következő diagramokról a legkisebb és legnagyobb értékeket! **Határozd meg**, hol/mikor veszik fel ezeket az értékeket!

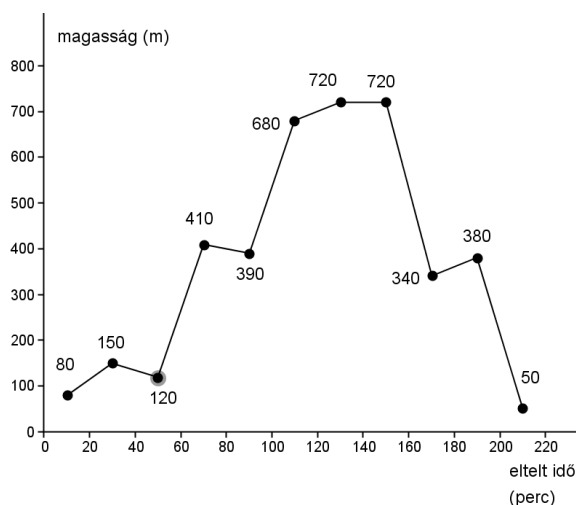
- a. Az adott években mért legmagasabb hőmérsékletek (°C) alakulása 1990 és 1996 között.



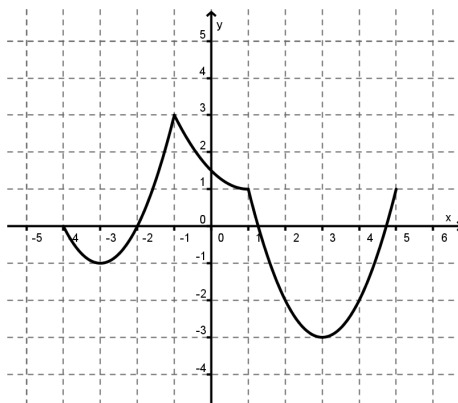
- b. Egyik évben a munkanélküliek száma (ezer főben) a legmagasabb iskolai végzettség szerint



37. Egy turistacsoport elment kirándulni a hegyekbe. Más útvonalon mentek, mint amit a visszatérésre választottak. Útjuk a következőképpen alakult:



- Milyen magasra másztak fel? Mikor voltak a legalacsonyabban?
 - Mennyi idő alatt mászták meg a hegyet?
 - Felfelé menet milyen magasságban értek ereszkedő szakaszhoz? Mekkora volt ezen a szakaszon a szintkülönbség?
 - Visszafelé az emelkedő szakasz előtt mekkora volt az út meredeksége, ha közben 1,2 km-t haladtak előre?
38. Az f függvény grafikonját látod az alábbi ábrán.



- Határozd meg a függvény legnagyobb értékét! Hol veszi fel ezt a függvény?
- Adj meg olyan intervallumot, ahol csökkennek a függvény értékei!
- Add meg az értelmezési tartományt!
- Határozd meg a függvény értékkészletét!
- Határozd meg a következő függvényértékeket: $f(-4) =$ $f(-1) =$
 $f(3) =$ $f(5) =$
- Olvasd le, hogy mely számokhoz tartozik az 1 illetve a -1 függvényérték!
- Hány olyan szám van, amire a függvény értéke 0?

A fontosabb függvénytulajdonságok

Zérushely:

Az értelmezési tartományban az az x érték, ahol a függvény helyettesítési értéke 0 ($f(x)=0$). Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény grafikonja ezen a helyen metszi az x tengelyt.

Tengelymetszet:

Az értékkészlet azon eleme, amit a függvény a 0-hoz rendel ($f(0)$). Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a függvény hol metszi az y tengelyt.

Monotonitás:

– Az f függvény egy intervallumon *szigorúan (monoton) növekvő*, ha az intervallumból választott bármely $x_1 < x_2$ hely esetén $f(x_1) < f(x_2)$, és *monoton növekvő*, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.
– Az f függvény egy intervallumon *szigorúan (monoton) csökkenő*, ha az intervallumból választott bármely $x_1 < x_2$ hely esetén $f(x_1) > f(x_2)$, és *monoton csökkenő*, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Maximum:

A függvénynek az x_0 helyen *abszolút maximuma* van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál nagyobb értéket sehol sem vesz fel.

x_0 -t *maximumhelynek*, $f(x_0)$ -t *maximumértéknek* nevezzük.

A függvénynek az x_0 helyen *helyi maximuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$ -nál a függvény nem vesz fel nagyobb értékét, de a környezeten kívül ennél nagyobb értéket is felvehet.

Minimum:

A függvénynek az x_0 helyen *abszolút minimuma* van, ha a függvény az $f(x_0)$ -nál kisebb értéket sehol sem vesz fel.

x_0 -t *minimumhelynek*, $f(x_0)$ -t *minimumértéknek* nevezzük.

A függvénynek az x_0 helyen *helyi minimuma* van, ha az x_0 hely valamely környezetében az $f(x_0)$ -nál a függvény nem vesz fel kisebb értékét, de a környezeten kívül ennél kisebb értéket is felvehet.

A függvény tulajdonságainak megállapításakor a következő szempontokat vesszük figyelembe:

1. Értelmezési tartomány meghatározása
2. Értékkészlet meghatározása (csak egyszerűbb esetekben)
3. Zérushely(ek) megállapítása
4. Monotonitás
5. Szélsőérték(ek) és azok helyeinek meghatározása

Alapfüggvények

Lineáris függvény

39. **Ábrázold** a betűjelednek megfelelő függvényeket soronként közös koordináta-rendszerben!

A:

$$f(x) = \frac{x-2}{2} \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$h(x) = \frac{3}{2}x - 4 \qquad i(x) = -\frac{2}{3}x - 3$$

B:

$$f : x \mapsto 2x + 4; \qquad g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 4; \qquad h : x \mapsto -3x + 4$$

$$f : x \mapsto 2x - 3; \qquad g : x \mapsto \frac{1}{2}x - 3; \qquad h : x \mapsto -3x - 3$$

C:

$$f : x \mapsto 2x; \qquad g : x \mapsto \frac{1}{2}x; \qquad h : x \mapsto -3x$$

$$f : x \mapsto 3; \qquad g : x \mapsto -3; \qquad h : x \mapsto \frac{1}{2}$$

D:

$$f : x \mapsto 2x; \qquad g : x \mapsto 2x + 3; \qquad h : x \mapsto 2x - 2$$

$$f : x \mapsto -2x; \qquad g : x \mapsto -2x + 3; \qquad h : x \mapsto -2x - 2$$

40. **Egészítsd ki** a hiányos szöveget!

Azokat a függvényeket, melyeknek grafikonja egyenes **függvények** nevezzük.

A lineáris függvények hozzárendelési szabálya mindig alakú.

Az **m** a függvény-ét jelöli,

A meredekség megmutatja, hogy az x tengely pozitív irányába egy egységet haladva, $m > 0$ esetén mennyivel, és $m < 0$ esetén mennyivel a függvény értéke.

A **b** értéke megmutatja, hogy a grafikon hol metszi az tengelyt.

Ha a hozzárendelés **$f(x)=mx$** alakú, vagyis a **b** értéke nulla, akkor a grafikon áthalad Az ilyen hozzárendelés esetén, ha x értékét valahányszorosára változtatjuk, akkor y értéke is ugyanannyi szorosára változik, vagyis arányosságról beszélhetünk.

Ha a hozzárendelés $f(x)=b$ alakú, vagyis m értéke nulla, akkor a függvény értéke állandó (konstans), nem is függ az x -től. Ilyen esetben a grafikon egy egyenes.

41. Előbb **ábrázold**, majd **írd fel** a lineáris függvények képletét!

D feladata:

1. Átmegy az origón, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 4 egységgel nő.
2. Átmegy a $(0; 2)$ ponton, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 4 egységgel nő.

C feladata:

1. Átmegy az origón, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 2 egységgel csökken.
2. Átmegy a $(0; 2)$ ponton, és az x tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 2 egységgel csökken.

B feladata:

1. Átmegy az origón, és az x tengely pozitív irányában 3 egységet haladva 9 egységgel nő.
2. Átmegy a $(0; 2)$ ponton, és az x tengely pozitív irányában 3 egységet haladva 9 egységgel nő.

A feladata:

1. Átmegy az origón, és az x tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 10 egységgel csökken.
2. Átmegy a $(0; 2)$ ponton, és az x tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 10 egységgel csökken.

42. **Olvasd le** az ábrán látható függvények hozzárendelési szabályát!

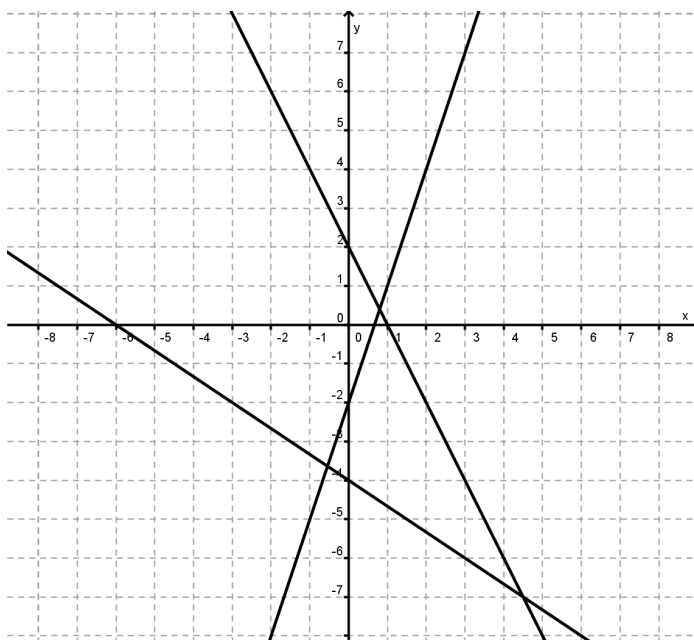
43. **Ábrázold** az alábbi feltételeknek eleget tevő egyeneseket, és **írd fel** a grafikonokhoz tartozó lineáris függvények hozzárendelési szabályát is!

f : Átmegy a $(-1; 0)$ és $(1; 6)$ pontokon.

g : Átmegy az origón és a $(3; -6)$ ponton.

h : Átmegy az origón és az $(4; 2)$ ponton.

i : Meredeksége $-\frac{1}{2}$ és átmegy a $(0; -4)$ ponton.



44. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket!

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$g(x) = 4 - 2x$$

$$h(x) = \frac{2x - 4}{3}$$

Válaszolj a következő kérdésekre:

- a. A g függvény meredeksége: $m =$
- b. A g függvény az y tengelyt a metszi
- c. Adj meg olyan függvényt, amelynek grafikonja párhuzamos a h függvénnyel!
- d. Legyen $A(1,?)$ és $B(?,2)$. Add meg a pontok hiányzó koordinátáját, hogy ezek az f függvény grafikonjára essenek!
- e. Mely x -ekre igaz, hogy $f(x) > 0$?
- f. Mely x -ekre igaz, hogy $f(x) \leq g(x)$?

A másodfokú függvény

45. **Ábrázold** az $x \mapsto x^2$ másodfokú függvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk másodfokú függvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

Az abszolútérték függvény

46. **Ábrázold** az $x \mapsto |x|$ abszolútérték függvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk abszolútérték függvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

A négyzetgyökfüggvény

47. **Ábrázold** az $x \mapsto \sqrt{x}$ négyzetgyökfüggvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk gyökfüggvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

Lineáris törtfüggvények

48. **Ábrázold** az $x \mapsto \frac{1}{x}$ lineáris törtfüggvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot!

Rajzold be a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket, felvenni az egységeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk lineáris törtfüggvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

*** Az egészrész-, a törtrész- és az előjel-függvény

Az x szám **egészrésze** a nála nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb. Jelölés: $\lfloor x \rfloor$.

Például $\lfloor 2,23 \rfloor = 2$, $\lfloor 13 \rfloor = 13$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor -2,34 \rfloor = -3$.

49. **Ábrázold** az $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ egészrész-függvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket, felvenni az egységeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk egészrész-függvényt ábrázolni?

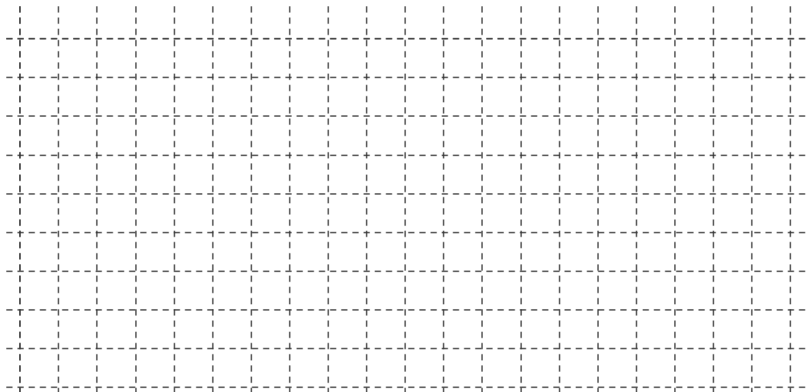
Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

Az x szám **tötrészét** úgy kapjuk, hogy a számból kivonjuk az egészrészét. Jelölés: $\{x\}$.

Például $\{2,23\} = 0,23$, $\lfloor 13 \rfloor = 0$, $\lfloor -3 \rfloor = 0$, $\lfloor -2,34 \rfloor = 0,66$.

50. **Ábrázold** az $x \mapsto \{x\}$ tötrész-függvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket, felvenni az egységeket?



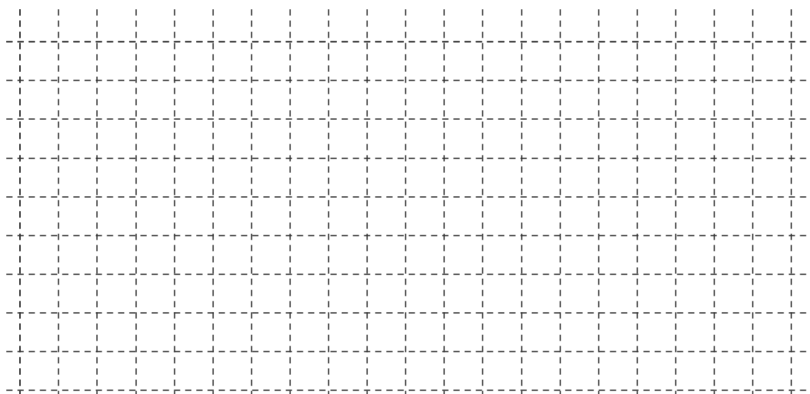
Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk tötrész-függvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

Az előjel-függvény definíciója: $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

51. **Ábrázold** az $x \mapsto \{x\}$ törtrész-függvényt! Ha szükséges, **készíts** értéktáblázatot! **Rajzold be** a koordináta tengelyeket a négyzetrácsra! Hogyan érdemes megrajzolni ezeket, felvenni az egységeket?



Milyen szabályt **fedezhetünk fel**, ami alapján könnyen tudunk előjel-függvényt ábrázolni?

Jellemezd a függvényt a tanult szempontok szerint!

É.T.:	É.K.:
Z.H.:	T.M.:
MIN:	MAX:
NÖV:	CSÖKK:

Függvény-transzformációk

D feladata

52. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a: x \mapsto x^2 \quad b: x \mapsto x^2 + 2 \quad c: x \mapsto x^2 - 1 \quad d: x \mapsto x^2 - 3$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az *a* függvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

53. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a: x \mapsto |x| \quad b: x \mapsto |x| + 2 \quad c: x \mapsto |x| - 1 \quad d: x \mapsto |x| - 3$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az *a* függvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

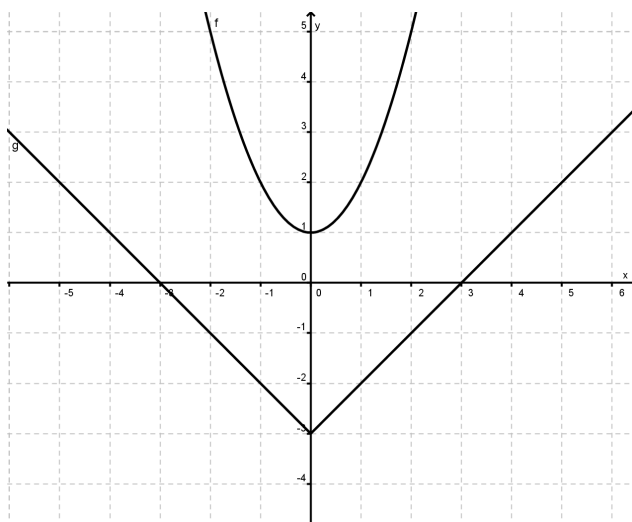
	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

54. **Add meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!

55. Értéktáblázat segítségével **ábrázold** a füzetbe a következő függvényeket!

$$f(x) = |x - 1| + 1$$

$$g(x) = (x - 1)^2 + 1$$



C feladata

56. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a : x \mapsto x^2 \quad b : x \mapsto (x+2)^2 \quad c : x \mapsto (x-1)^2 \quad d : x \mapsto (x-3)^2$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az a függvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
a								
b								
c								
d								

57. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a : x \mapsto |x| \quad b : x \mapsto |x+2| \quad c : x \mapsto |x-1| \quad d : x \mapsto |x-3|$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az a függvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

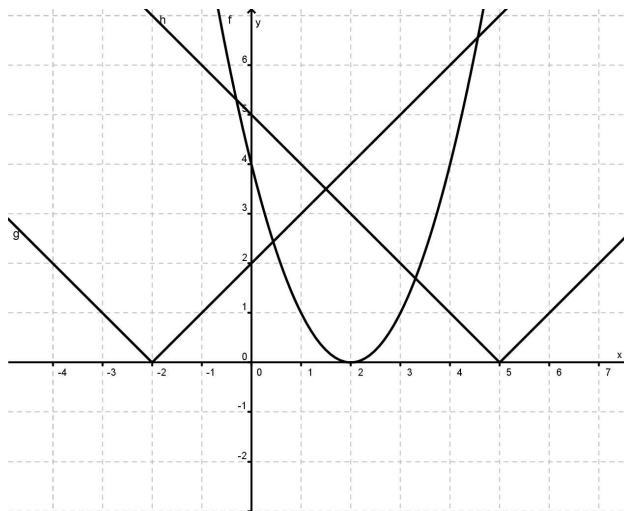
	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
a								
b								
c								
d								

58. **Add meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!

59. Értéktáblázat segítségével **ábrázold** a füzetbe a következő függvényeket!

$$f(x) = |x+1| - 1$$

$$g(x) = (x-2)^2 - 1$$



B feladata

60. Ábrázold közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a: x \mapsto 2x^2 \quad b: x \mapsto \frac{1}{3}x^2 \quad c: x \mapsto \frac{1}{2}|x| \quad d: x \mapsto 3|x|$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az alapfüggvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

61. Ábrázold közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a: x \mapsto \frac{2}{x} \quad b: x \mapsto \frac{1}{2x} \quad c: x \mapsto 2\sqrt{x} \quad d: x \mapsto \sqrt{4x}$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az alapfüggvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

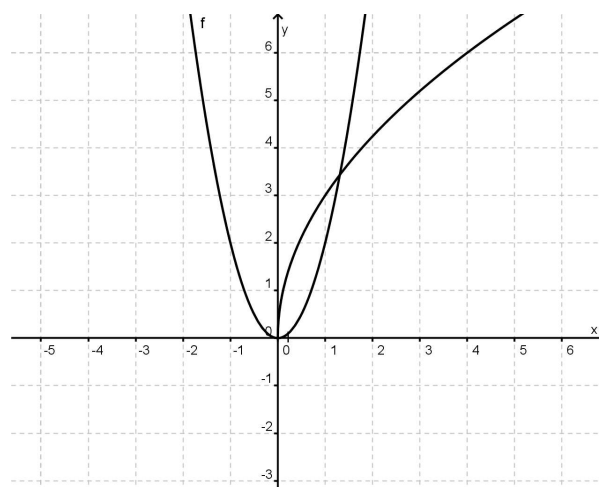
	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

62. Add meg a következő függvények hozzárendelési szabályát!

63. Értéktáblázat segítségével ábrázold a füzetbe a következő függvényeket!

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$$



A feladata

64. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a : x \mapsto -x^2 \quad b : x \mapsto -|x| \quad c : x \mapsto -\sqrt{x} \quad d : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az alapfüggvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

65. **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket:

$$a : x \mapsto -(x-1)^2 \quad b : x \mapsto -|x+2|-1 \quad c : x \mapsto \frac{1}{-x} \quad d : x \mapsto \sqrt{-x}$$

Mit veszel észre, milyen geometriai *transzformációval* kapjuk meg az alapfüggvény grafikonjából a többi grafikont?

Jellemezd a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

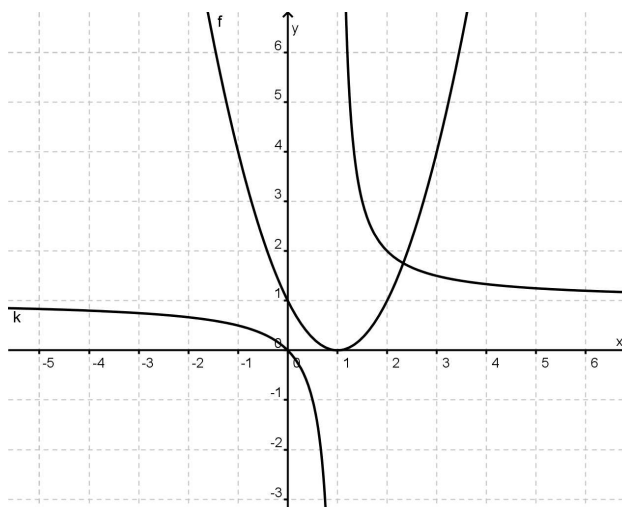
	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
<i>a</i>								
<i>b</i>								
<i>c</i>								
<i>d</i>								

66. **Add meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!

67. Értéktáblázat segítségével **ábrázold** a fűzetbe a következő függvényeket!

$$f(x) = ||x-1|-1|$$

$$g(x) = |(x-1)^2 - 1|$$



D feladata

68. Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

$$a : x \mapsto x^2$$

$$b : x \mapsto (x-1)^2$$

$$c : x \mapsto (x-1)^2 - 4$$

Jellemezd a c függvényt az ismert szempontok szerint!

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
c								

69. Ábrázold az $f : x \mapsto |x-3|-2$ függvényt!

Melyik *alapfüggvény* transzformálásával állítható elő ennek a függvénynek a grafikonja?

$$a : x \mapsto$$

Határozd meg a transzformációs lépéseket! **Add meg** a geometriai transzformációt is!

$$b : x \mapsto$$

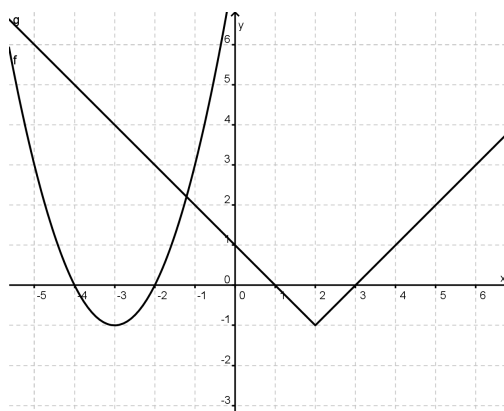
transzformáció:

$$f : x \mapsto$$

transzformáció:

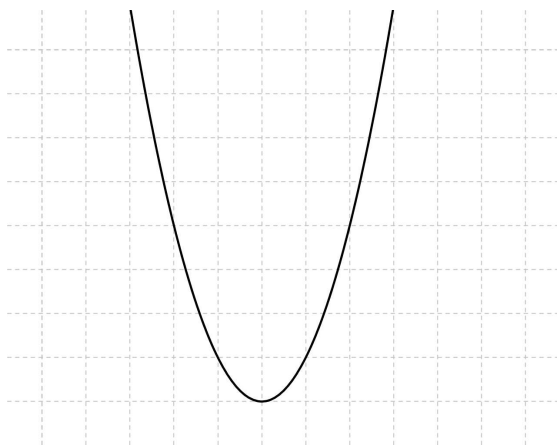
Jellemezd az f függvényt!

70. Állapítsd meg a következő függvények hozzárendelési szabályát!

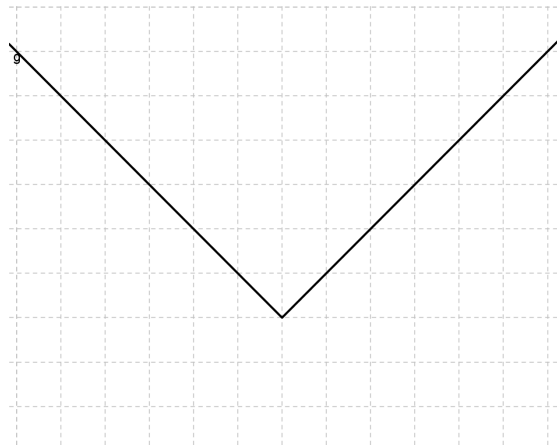


71. Rajzold be a koordináta-tengelyeket, ha adott a függvény grafikonja és a hozzárendelési szabály!

$$x \mapsto (x-2)^2$$



$$x \mapsto |x-1|-1$$



C feladata

72. **Ábrázold** a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

$$a : x \mapsto |x|$$

$$b : x \mapsto |x+3|$$

$$c : x \mapsto |x+3| - 2$$

Jellemezd a c függvényt az ismert szempontok szerint!

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
c								

73. **Ábrázold** az $f : x \mapsto (x-2)^2 - 2$ függvényt!

Melyik *alapfüggvény* transzformálásával állítható elő ennek a függvénynek a grafikonja?

$$a : x \mapsto$$

Határozd meg a transzformációs lépéseket! **Add meg** a geometriai transzformációt is!

$$b : x \mapsto$$

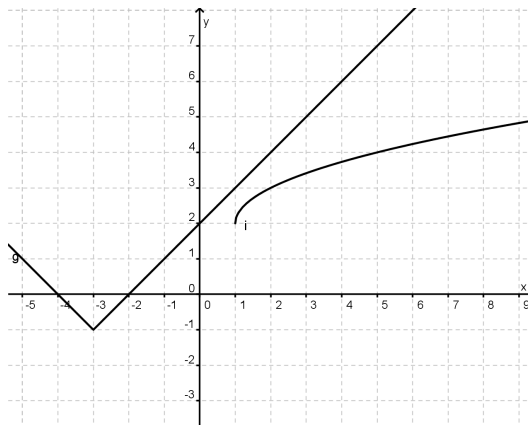
transzformáció:

$$f : x \mapsto$$

transzformáció:

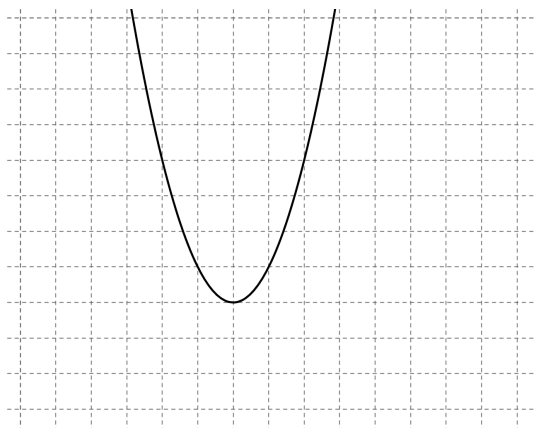
Jellemezd az f függvényt!

74. **Állapítsd meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!

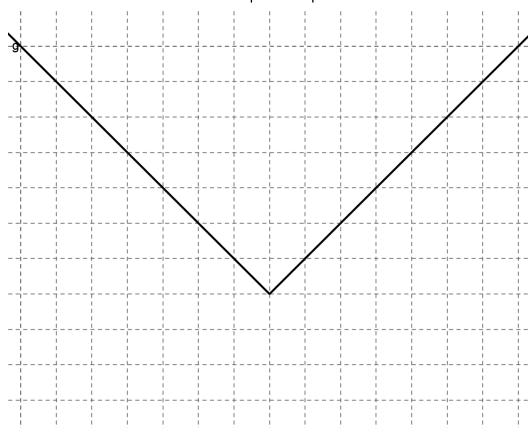


75. **Rajzold be** a koordináta-tengelyeket, ha adott a függvény grafikonja és a hozzárendelési szabály!

$$x \mapsto (x-2)^2$$



$$x \mapsto |x-1| - 1$$



B feladata

76. Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

$$a : x \mapsto |x|$$

$$b : x \mapsto |x + 3|$$

$$c : x \mapsto 2|x + 3|$$

$$d : x \mapsto 2|x + 3| - 4$$

Jellemezd a d függvényt az ismert szempontok szerint!

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
d								

77. Ábrázold az $f : x \mapsto -(x - 2)^2 - 2$ függvényt!

Melyik *alapfüggvény* transzformálásával állítható elő ennek a függvénynek a grafikonja?

$$a : x \mapsto$$

Határozd meg a transzformációs lépéseket! **Add meg** a geometriai transzformációt is!

$$b : x \mapsto$$

transzformáció:

$$c : x \mapsto$$

transzformáció:

$$d : x \mapsto$$

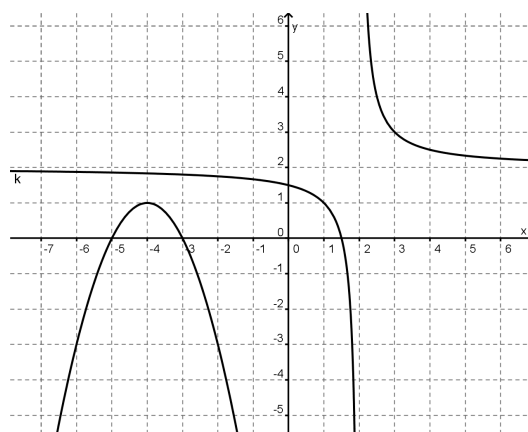
transzformáció:

$$f : x \mapsto$$

transzformáció:

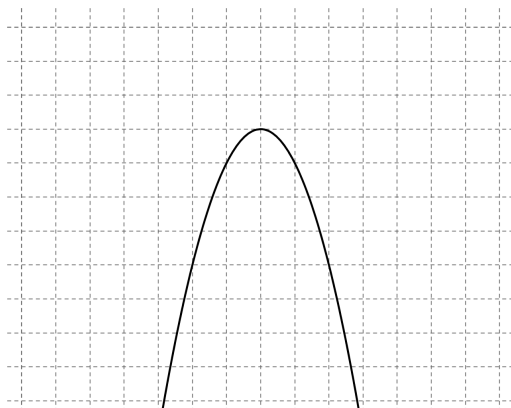
Jellemezd az f függvényt!

78. Állapítsd meg a következő függvények hozzárendelési szabályát!

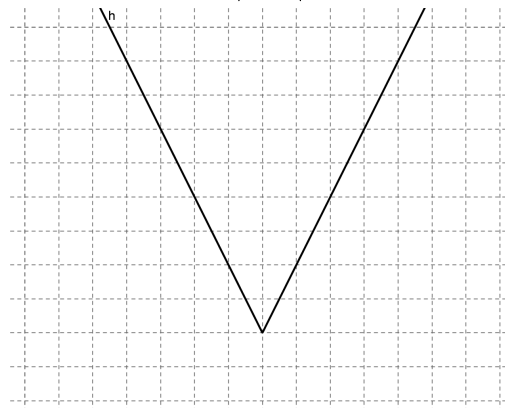


79. Rajzold be a koordináta-tengelyeket, ha adott a függvény grafikonja és a hozzárendelési szabály!

$$x \mapsto -(x - 2)^2 + 1$$



$$x \mapsto 2|x - 1| - 1$$



A feladata

80. **Ábrázold** a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

$$a : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$b : x \mapsto \frac{1}{x-2}$$

$$c : x \mapsto -\frac{1}{x-2}$$

$$d : x \mapsto -\frac{1}{x-2} + 3$$

Jellemezd a d függvényt az ismert szempontok szerint!

	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
d								

81. **Ábrázold** az $f : x \mapsto -\sqrt{x-3} - 2$ függvényt!

Melyik *alapfüggvény* transzformálásával állítható elő ennek a függvénynek a grafikonja?

$$a : x \mapsto$$

Határozd meg a transzformációs lépéseket! **Add meg** a geometriai transzformációt is!

$$b : x \mapsto$$

transzformáció:

$$c : x \mapsto$$

transzformáció:

$$d : x \mapsto$$

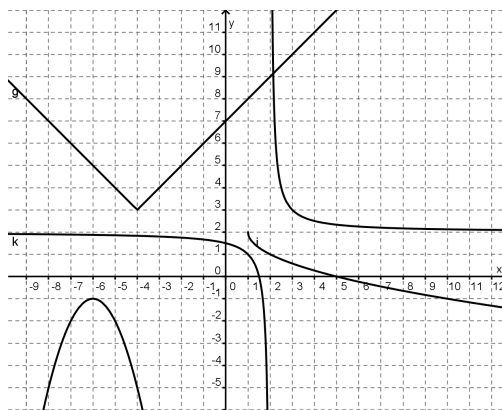
transzformáció:

$$f : x \mapsto$$

transzformáció:

Jellemezd az f függvényt!

82. **Állapítsd meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!

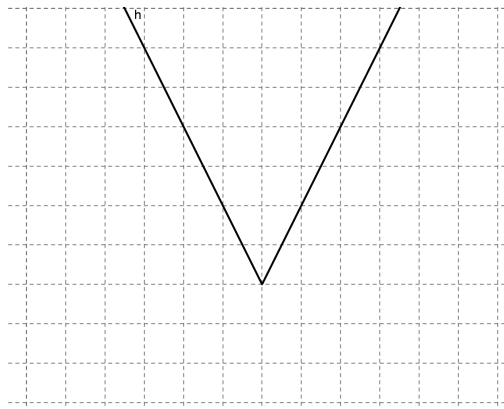


83. **Rajzold be** a koordináta-tengelyeket, ha adott a függvény grafikonja és a hozzárendelési szabály!

$$x \mapsto -\sqrt{x-1} + 1$$



$$x \mapsto 2|x-1| - 1$$



84. Ábrázold!

$$g : x \mapsto f(x) + 2$$

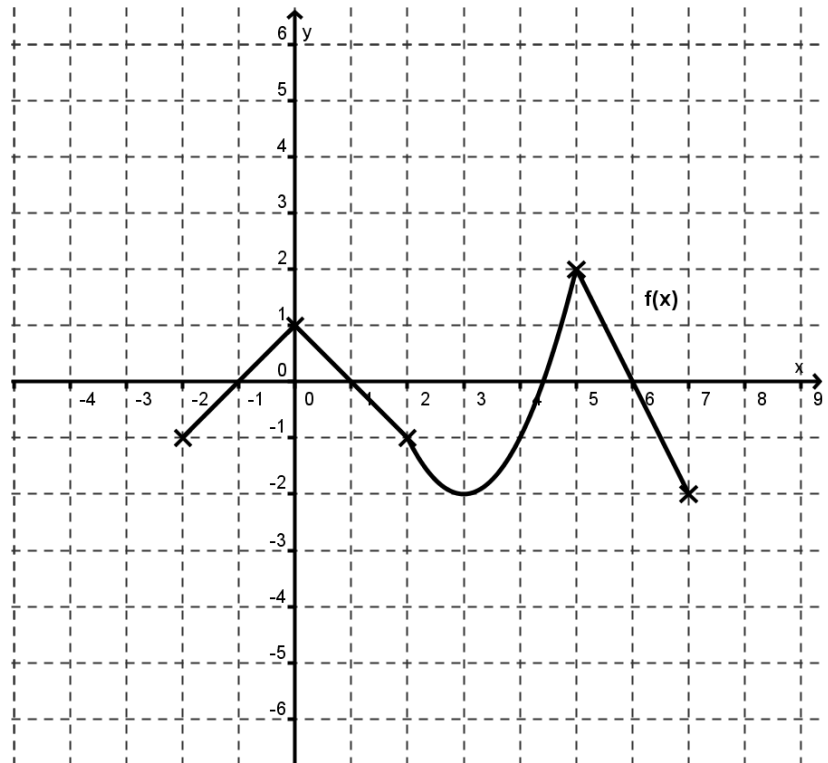
$$h : x \mapsto f(x) - 1$$

$$i : x \mapsto f(x + 2)$$

$$j : x \mapsto f(x - 1)$$

$$l : x \mapsto -f(x)$$

$$m : x \mapsto 2 \cdot f(x)$$

**Fogalmazd meg!**

Az $f(x)$ függvény grafikonjának ismeretében, melyik geometriai transzformáció segítségével kapod meg a következő függvények grafikonját?

a. $f(x) + a$, ha $a > 0$

b. $f(x) + a$, ha $a < 0$

c. $f(x + a)$, ha $a > 0$

d. $f(x + a)$, ha $a < 0$

e. $-f(x)$

f. $a \cdot f(x)$

85. **Ábrázold** a betűjeleknek megfelelő függvényeket! Mindegyiknél **gondold végig**, hogy mi az alapfüggvény, és milyen transzformációs lépésekkel kapod meg annak grafikonjából az ábrázolni kívánt függvény grafikonját!

$$D \quad a: x \mapsto 2x^2 - 1 \quad b: x \mapsto \frac{1}{2}|x| + 2 \quad c: x \mapsto 3(x-1)^2$$

$$d: x \mapsto -\sqrt{x} + 4$$

$$C \quad e: x \mapsto 2(x-1)^2 \quad f: x \mapsto -|x| + 2 \quad g: x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

$$h: x \mapsto -\frac{1}{x} + 2$$

$$B \quad i: x \mapsto 2\sqrt{x-2} + 1 \quad j: x \mapsto -|x-3| - 2 \quad k: x \mapsto -(x-3)^2 + 1$$

$$l: x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$$

$$A \quad m: x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1 \quad n: x \mapsto -2|x+4| - 1 \quad o: x \mapsto -3\sqrt{3+x} - 3$$

$$p: x \mapsto -\frac{2}{x+2} - 1$$

Jellemezz legalább kettőt az ábrázolt függvények közül!

86. **Ábrázold és jellemezd** a következő függvényeket!

$$d: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -(x-2)^2 + 4 \quad c:]-3; 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -|x+1| + 2$$

$$b: [1; 10[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2\sqrt{x-1} + 2 \quad a:]-4; 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$$

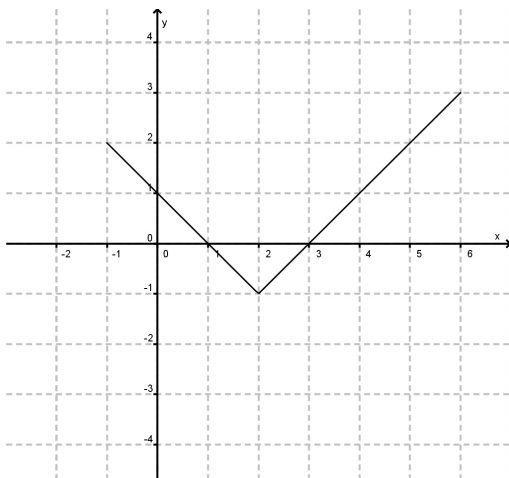
87. **Ábrázold és jellemezd** a következő függvényeket:

$$D: f: x \mapsto \begin{cases} -x+3 & \text{ha } x < 3 \\ x-3 & \text{ha } x \geq 3 \end{cases} \quad C: g: x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{ha } x > -1 \\ -2x-3 & \text{ha } x \leq -1 \end{cases}$$

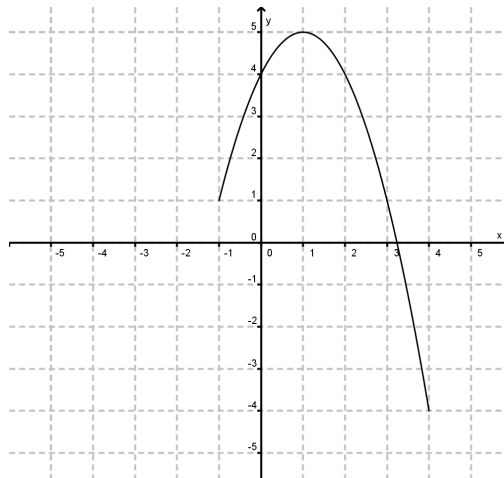
$$B: h: x \mapsto \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & \text{ha } x < 0 \\ |x-2| - 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad A: i: x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{x-1} - 1 & \text{ha } x > 1 \\ |x+1| - 3 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

88. Add meg a következő függvények hozzárendelési szabályát, és jellemezd a függvényeket!

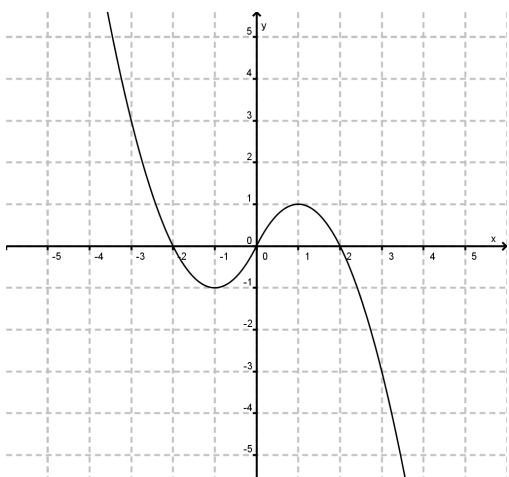
$d: \dots \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto$



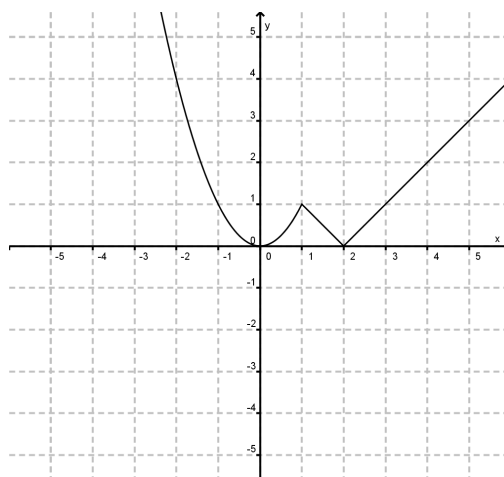
$c: \dots \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto$



$b: \dots \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto$



$a: \dots \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto$



	ÉT	ÉK	Zh	Tm	MIN	MAX	NÖV	CSÖKK
a								
b								
c								
d								

89. Ábrázold a következő függvényeket, majd írd fel a hozzárendelési szabályt abszolút érték nélkül!

$$f: x \mapsto |x-3|+1$$

$$g: x \mapsto -|x+1|+2$$

$$f: x \mapsto \begin{cases} \text{ha } x < 3 \\ \text{ha } x \geq 3 \end{cases}$$

$$g: x \mapsto \begin{cases} \text{ha } x < -1 \\ \text{ha } x \geq -1 \end{cases}$$

90. **Ábrázold** közös koordinátarendszerben a betűjelednek megfelelő függvényeket! Mit tapasztalsz?

$$D: a : x \mapsto x - 2$$

$$b : x \mapsto |x - 2|$$

$$C: f : x \mapsto 2x - 2$$

$$g : x \mapsto |2x - 2|$$

$$B: h : x \mapsto (x - 1)^2 - 4$$

$$i : x \mapsto |(x - 1)^2 - 4|$$

$$A: j : x \mapsto \frac{1}{x - 2} - 1$$

$$k : x \mapsto \left| \frac{1}{x - 2} - 1 \right|$$

91. **Ábrázold** közös koordináta-rendszerben a betűjelednek megfelelő függvényeket:

$$D: x \mapsto |x - 1| - 2$$

$$x \mapsto ||x - 1| - 2|$$

$$x \mapsto ||x - 1| - 2| - 1$$

$$C: x \mapsto (x - 2)^2 - 1$$

$$x \mapsto |(x - 2)^2 - 1|$$

$$x \mapsto |(x - 2)^2 - 1| - 3$$

$$B: x \mapsto \sqrt{x - 1} - 2$$

$$x \mapsto |\sqrt{x - 1} - 2|$$

$$x \mapsto |\sqrt{x - 1} - 2| - 1$$

$$A: x \mapsto \frac{1}{x + 1} + 1$$

$$x \mapsto \left| \frac{1}{x + 1} + 1 \right|$$

$$x \mapsto \left| \frac{1}{x + 1} + 1 \right| - 2$$

Jellemezd az utolsónak ábrázolt függvényt!

92. *****Ábrázold** a következő függvényeket!

$$f : x \mapsto |2|x - 2| - 2| - 2$$

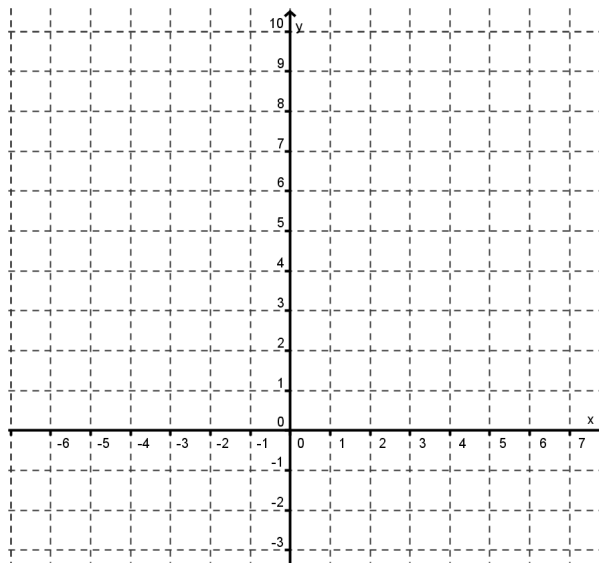
$$g : x \mapsto |(x + 3)^2 - 4| - 3$$

$$h : ||x - 1| - 1| - 2| - 3$$

$$i : x \mapsto \left| \frac{-2}{x + 2} - 1 \right| - 2$$

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

93. **Ábrázold** közös koordináta-rendszerben az $f(x) = 2x - 3$ és $g(x) = (x - 2)^2 - 2$ függvényeket!



Jelöld be pirossal azokat a pontokat, ahol a két grafikon metszi egymást!

Jelöld be kékkel az x tengely azon pontjait, melyeknek első koordinátája megegyezik a pirossal jelölt pontok első koordinátájával!

Határozd meg az $2x - 3 = (x - 2)^2 - 2$ egyenlet megoldásait!

94. **Oldd meg** grafikusan a következő egyenleteket!

a. $(x - 2)^2 - 1 = 3$

b. $|x - 4| + 2 = 5$

c. $2|x + 2| + 1 = -\frac{1}{4}x + 5$

d. $|x + 3| = x + 3$

e. $-(x - 2)^2 + 4 = 3$

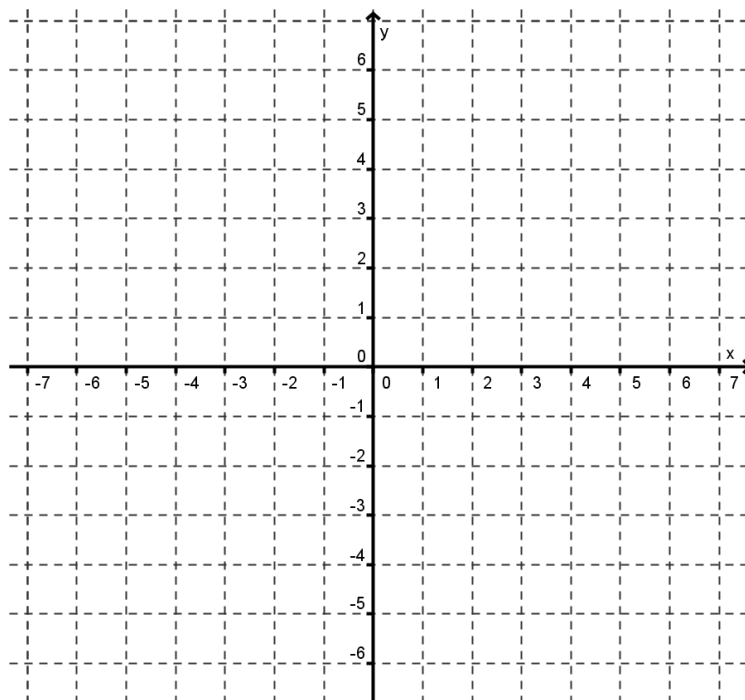
f. $|x - 1| + 2 = -\frac{1}{2}x + 3$

g. $(x - 4)^2 + 1 = x - 2$

h. $|x + 3| = -x - 3$

i. $|x - 2| + |x - 2| = 2$

95. **Ábrázold** közös koordináta-rendszerben az $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ és $g(x) = -|x - 1| + 4$ függvényeket!



Jelöld be pirossal azokat a pontokat a g függvény grafikonján, ahol a grafikonja az f grafikonja felett halad!

Jelöld be kékkel az x tengely azon pontjait, melyeknek első koordinátája megegyezik a pirossal jelölt pontok első koordinátájával!

Határozd meg az $\frac{1}{3}x + 1 < -|x - 1| + 4$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

96. Grafikusan **oldd meg** a következő egyenlőtlenségeket!

a. $|x - 3| - 2 < 0$

b. $|x + 2| - 4 \geq 0$

c. $(x + 1)^2 - 4 \geq 0$

d. $(x - 2)^2 - 1 > 3$

e. $|x - 4| + 2 \leq 5$

f. $2|x + 2| + 1 \geq -\frac{1}{4}x + 5$

g. $(x - 1)^2 - 1 \geq 0$

h. $|x - 3| - 2 > 1 - |x + 1|$

i. $|x - 2| - |x + 2| > 1$

j. $-(x - 2)^2 + 4 > 3$

k. $|x - 1| + 2 < -\frac{1}{2}x + 3$

l. $(x - 4)^2 + 1 \geq x - 2$

Statisztika

A statisztika alapjai

A **matematikai statisztika** adatok gyűjtésével, rendszerezésével és elemzésével foglalkozik. A **statisztikus** egy kíváncsi ember, aki bizonyos dolgokról vagy emberekről szeretne egyet s mást megtudni.

A statisztika adatoknak fontos szerepe van a mindennapi életben. Például, ha egy cukrász fagylalkészítésre adja a fejét, akkor felmérheti, hogy mely fagylaltokra van a legnagyobb igény a környéken lakók körében.

Ha szeretnénk egy mosógépet vásárolni, akkor érdemes tájékozódni a várható élettartamáról, átlagos energiafogyasztásáról stb. mielőtt döntünk.

Az AKG-ban, mielőtt elindítjuk az alkotóköröket, felmérjük, hogy melyikre milyen igény mutatkozik.

A könyvkiadók, mielőtt meghatároznák, hogy egy könyvből hány példánnyal rukkolnak ki a piacra, a statisztikákból tájékozódhatnak arról, hogy a hasonló könyvekből korábban mennyi fogyott.

97. **Gyűjts** olyan példákat, amikor a te döntésedet is segítette, vagy segíthette volna néhány statisztikai adat ismerete.

Írj ide néhányat:

98. **Nézz utána**, hogy mi az a KSH! Mivel foglalkozik? **Írd le**, mit találtál!

Adatok gyűjtése, rendszerezése

Ha felmérést végzünk, vagy kísérletezünk, akkor az adatokat érdemes rendszerezni!

Példa:

Marci kishúga, Lili, nagyon szeret „Ki nevet a végén?”-t játszani. Ebben a játékban akkor lehet a bábuval a játékmezőkre kilépni és a játékot elkezdeni, ha 6-ost dobysz. Lili azt kérte Marcitól, hogy inkább 4-es dobásra lehessen kilépni, mert az sokkal többször sikerül neki. Marci kísérlettel akarta húgának bebizonyítani, hogy nincs igaza, mert bármelyik számra ugyanakkora esélye van.

Egy dobókockával 50-szer dobott, és a következő értékeket kapta:

3, 2, 1, 6, 6, 5, 2, 1, 3, 5, 4, 2, 3, 5, 2, 1, 2, 2, 5, 5, 6, 1, 3, 6, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 2, 3, 5, 3, 5, 6, 3, 4, 2, 4, 6, 4, 5, 3, 2, 1, 3, 3

Összesítette is az eredményeket:

1-es: 6 db 2-es: 10 db 3-as: 13 db 4-es: 5 db 5-ös: 8 db 6-os: 6 db

Kishúga már másodikos volt, és szeretett számolgatni. Nézegette az összesítést, és kijelentette, hogy bátyja hibázott. Igaza volt? Miért?

99. Ha Marci rosszul számolt, akkor **javítsd ki** az adatokat!

Egyszerűbb dolga lett volna az összeszámolásnál, ha készít egy táblázatot a dobható értékekről, és minden dobás után egy strigulát húz a megfelelő helyre. (A könnyebb számolás érdekében minden ötödik strigulával az előző négyet áthúzzuk.)

Így:

1-es			
2-es	-		
3-as	-		
4-es			
5-ös			
6-os			

100. **Számold össze** a strigulákat, írd a megfelelő sorba, és nézd meg, hogy jól válaszoltál-e az előző kérdésre!

Marci barátja, Péter, is beszállt a kísérletezésbe. Nagyon lelkes volt, ezért ő 100 kockadobást végzett. Az ő eredményeit látod a következő táblázatban.

1-es	- -		
2-es	-		
3-as	- -		
4-es	- - -		
5-ös	-		
6-os	- -		

101. **Végezd el** az összesítést!

102. Hogyan lehetne összehasonlítani Peti és Marci eredményeit? Melyiküknél volt gyakoribb a 6-os dobás? És a 4-es?

Egy-egy dobás előfordulásának számát **gyakoriságnak** nevezzük. Például Péter dobássorozatában a 6-os gyakorisága 17. Ez az adat önmagában nem jelent semmit. Azt is tudnunk kell, hogy összesen hány dobásból jött ki 17-szer a 6-os szám. Ha a gyakoriságot elosztjuk az összes dobás számával, akkor megkapjuk a relatív gyakoriságot. Péter dobássorozatában a 6-os **relatív gyakorisága**: $17 : 100 = 0,17$. Ez az érték megmutatja, hogy a dobások 0,17 része (másképpen 17%-a) volt 6-os.

A táblázatok negyedik oszlopába írd be az egyes dobások relatív gyakoriságát. Vigyázz, az első esetben 50 kísérlet volt, tehát 50-nel kell osztani a gyakoriságot!

103. Felmérést kell készíteni valamilyen tulajdonságról a kupacban! Mindenkit meg kell kérdezned!

Írd ide, hogy az osztályban milyen tulajdonságról készítettél felmérést!

Milyen kérdést tettél fel?

Milyen lehetőségek voltak a válasyra?

Gondold végig, hogy milyen táblázatot kell készítened, hogy az adatokat összesíthesd!
Rajzold ide a táblázatot!

104. Számítsd ki az egyes válaszok gyakoriságát és relatív gyakoriságát is!

Hogyan lehetne szemléletesen ábrázolni a kapott eredményt?

Adatok szemléltetése – diagramok

Az adatok szemléletes megjelenítésére sokféle diagramot használhatunk. A rajzos szemléltetés (grafikus ábrázolás) arra jó, hogy ránézésre eldönthessük az egyes adatfajtákhoz tartozó gyakoriságok arányát. Leolvashatjuk például, hogy miből van a legtöbb, vagy a legkevesebb.

Az egyik leggyakrabban használt szemléltetési mód az **oszlopdiagram**.

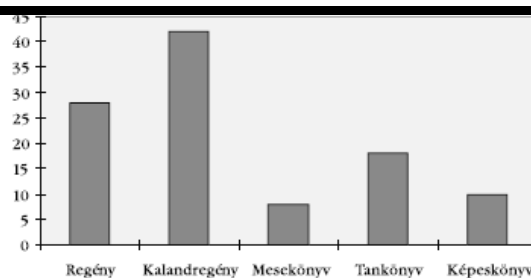
Példa:

Egy gyermekkönyvtárban az egyik nap feljegyezték, hogy milyen műfajú könyveket kölcsönöztek ki a könyvtárlátogatók. Az eredmény a következő volt:

Regény: 27, képregény: 42, mesekönyv: 8, tankönyv: 18 és képeskönyv 10db.

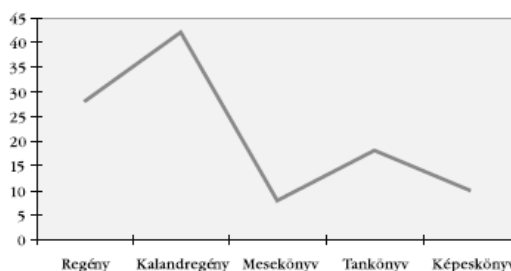
105. Írd be a táblázatba a gyakorisági adatokat, és számolj relatív gyakoriságot!

A gyakorisági adatok **oszlopdiagramon** ábrázolva:



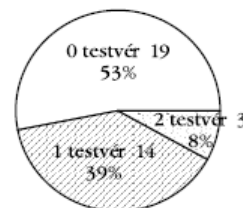
Gondolkodj! Mi történne, ha nem a gyakoriságot, hanem a relatív gyakoriságot ábrázolnánk? Készítsd el a grafikont a füzetedbe! Ne feledkezz meg a feliratozásról!

Ugyanezeket az adatokat **törött vonal diagramon** (poligon) is ábrázolhatjuk:

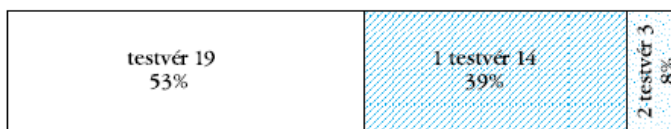


Ha az adatok százalékos eloszlását akarjuk megmutatni, akkor **kördiagramot** vagy **sávdiagramot** érdemes használni.

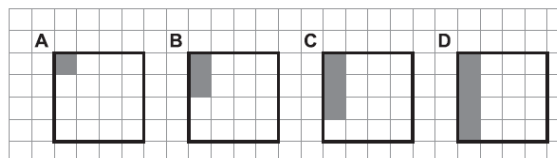
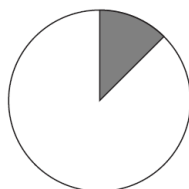
Egy iskolai osztályban felmérést készítettek arról, hogy a tanulóknak hány testvére van. A felmérésből az ábrán látható **kördiagramot** kapták. A teljes kör a 100%-ot jelenti. A körcikkek területe mutatja az egyes adatok relatív gyakoriságát (százalékban). (A megfelelő területű körcikket úgy lehet berajzolni, hogy a 360°-os középponti szöget megfelelő nagyságú részekre osztjuk. Például a 10%-nak 36°-os szög felel meg.)



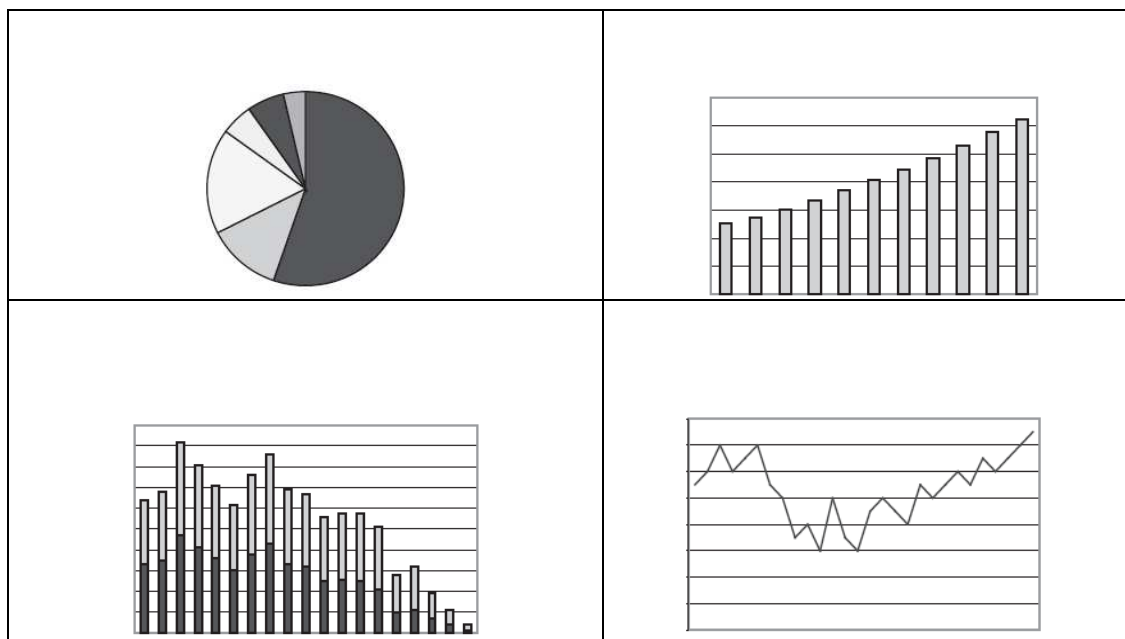
A kördiagram helyett **sávdíagramot** is használhatunk ugyanezeknek az adatoknak a megjelenítésére.



106. Melyik négyzetnek van ugyanakkora hányada beszínezve, mint a körnek?



107. Egy napilap szerkesztője külön fájlokban kapta meg a rajzos és a szöveges anyagokat. Így a következő négy grafikon címeit is. Találd ki, hogy a lenti címek közül melyik illik az egyes képekhez, és írd őket a megfelelő helyre!



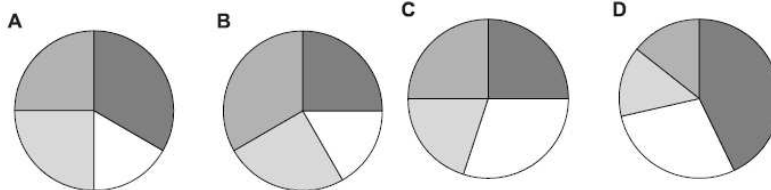
Címek:

- Egy ország népessége korcsoportokra lebontva, ezen belül a férfiak és nők aránya
- Egy város népességének alakulása az egymást követő évek során
- Valutaárfolyam alakulása
- Az ipari termelés szerkezete a fővárosban

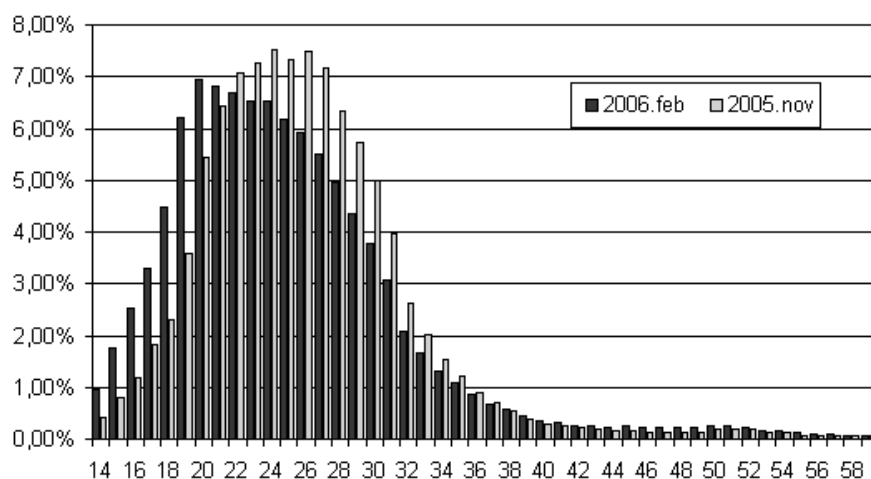
108. A világ halászatában vezető szerepet játszik Norvégia, Izland, Japán és az Egyesült Államok. Az alábbi táblázatban azt látjuk, hogy ezek az országok milyen százalékban vették ki a részüket a világ halászatából 1998-ban. Melyik kördiagram ábrázolja

helyesen az adatokat? Karikázd be a megfelelőt! Írd az egyes országokat és a százalékos adatokat a megfelelő helyre!

Japán	6%
Egyesült Államok	4%
Norvégia	2%
Izland	2%



109. A grafikon 2005. novemberben és 2006. februárban mutatja a 14 és 59 év közötti IWIW felhasználók arányát. Figyeld meg a grafikont (milyen típusú?), és válaszolj a kérdésekre!

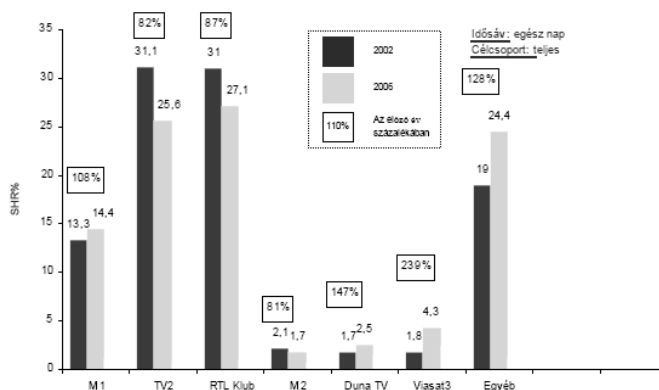


- Mely korosztályban IWIW-eztek a legtöbb 2005-ben illetve 2006-ban?
- Ha tudjuk, hogy 2005-ben kb. 100 000-en IWIW-eztek, akkor ezek között hányan voltak a 16 évesek?
- Milyen szembetűnő változás olvasható le a 2006-os és 2007-es adatokból?

110. Nézd meg a grafikont, és válaszolj a kérdésekre!

- Melyik adó nézettsége növekedett 2002 és 2006 között

3. ábra A legjelentősebb csatornák közönségarányainak alakulása (2002 és 2006, éves átlagadatok SHR%)

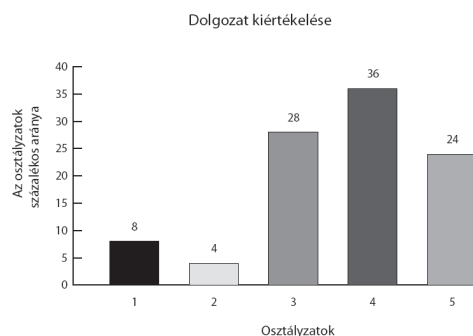


Forrás: AGB Nielsen Médiautató Kft, Nézettségi trendek 2002-2007

- Mit jelenthet az oszlopok fölötti téglalapba írt %-os érték?
- Mit jelent, ha ez 100% felett van? És ha alatta?

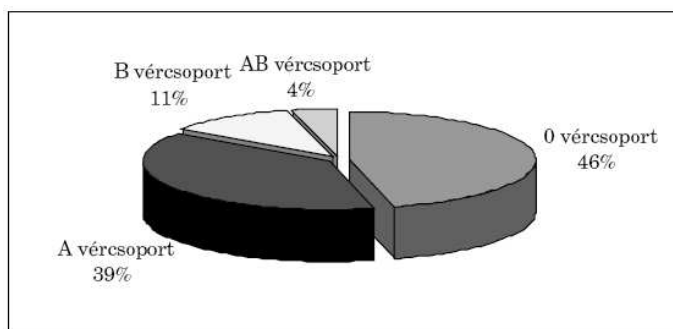
111. Egy 25 fős osztály matematikatanára dolgozatot íratott. A dolgozat javítása után kiszámolta az egyes osztályzatok százalékos előfordulását. Ezeket az értékeket mutatja az oszlopdiagram.

Döntsd el, hogy melyik igaz, illetve melyik hamis az állítások közül!



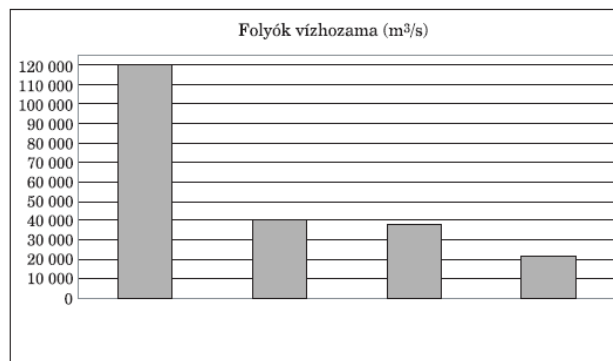
ÁLLÍTÁS	I/H
Az osztály tanulóinak több mint felel hármas vagy négyes osztályzatot kapott.	
Minden ötödik tanuló elégtelenre írta meg a dolgozatát.	
Páros számú tanuló kapott hármaszt a dolgozatára.	
Ugyanannyi tanuló kapott hármaszt, mint kettest és ötöst együttevve.	

112. Egy felmérés eredménye szerint az Rh⁺ vérű emberek között a négy vércsoport előfordulási aránya a következő:



Az Északi Egyetemnek 850 olyan hallgatója van, akinek vére Rh⁺ faktort tartalmaz. A fenti adatok alapján állapítsd meg, hogy közülük várhatóan hány diák vére lesz AB vércsoportú!

113. A Föld négy legbővizűbb folyója a braziliai Amazonas, az argentin Paraná, az afrikai Kongó és a kínai Jangce. Az ábrán a folyók által 1 másodperc alatt szállított vízmennyiségeket láthatod. A négy folyó közül az Amazonas szállítja a legnagyobb víztömeget, a Jangce a legkevesebbet. A Paraná másodpercenkénti vízhozama ezer köbméterrel haladja meg a Kongó vízhozamát. Írd az oszlopok alá a hozzájuk tartozó folyó nevét!

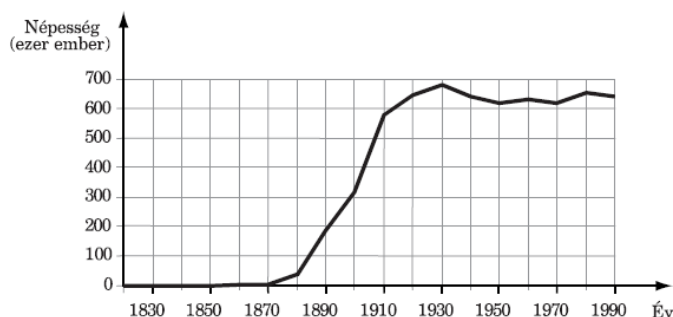


Olvasd le az oszlopdiagramról, hogy mennyi vizet szállít a Kongó folyó másodpercenként!

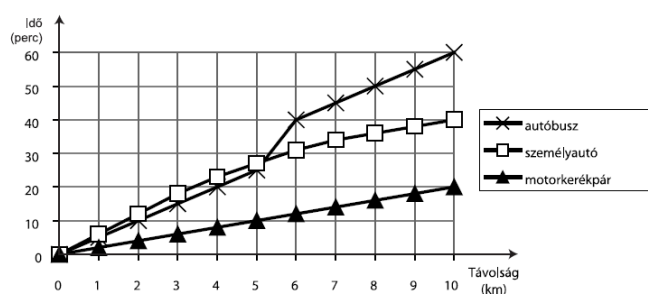
114. Az alábbi grafikon egy város népességének alakulását ábrázolja.

- Mekkora volt a város népessége 1960-ban?
- Melyik időszakban növekedett leggyorsabban a város népessége?

- A 1870 és 1880 között
 B 1880 és 1890 között
 C 1900 és 1910 között
 D 1930 és 1950 között



115. Kovács úr a lakóhelyétől a város túlsó felére, 10 km távolságra jár dolgozni minden reggel. Az utazáshoz három közlekedési eszköz: autóbusz, személyautó és motorkerékpár közül választhat. A grafikon a munkahelyre jutás időtartamát mutatja a reggeli csúcsforgalom idején az egyes közlekedési eszközökkel. Melyik járművel ér be leghamarabb a munkahelyére Kovács úr?



116. A grafikon növények átlagos magasságát ábrázolja annak függvényében, hogy naponta hány órán keresztül éri őket napfény.

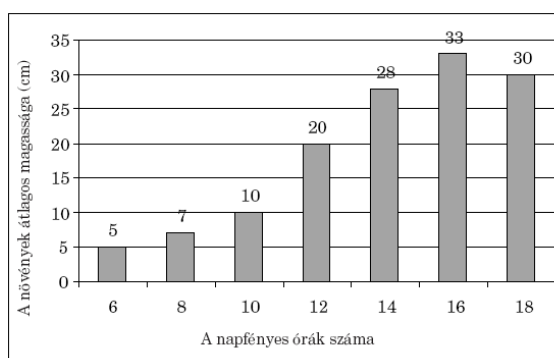
A grafikont figyelembe véve, az alábbi állítások közül melyik igaz? Karikázd be az igaz állítások betűjelét!

A A növények átlagos magassága nagyobb napi 12 óra napfény mellett, mint napi 14 óra napfény mellett.

B A növények átlagos magassága egyenesen arányos az őket naponta érő napfény mennyiségével.

C A napi 16 órán át napon lévő növények átlagosan magasabbak, mint a napi 14 órán át napon lévőek.

D Azok a növények, amelyek naponta több órát vannak napon, magasabbra nőnek.



Statisztikai mutatók – középértékek

Biztosan ismered a „Legyen ön is milliomos!” játékot. Ebben a játékban minden kérdés esetén négy lehetséges válasz közül (A , B , C , D) kell a helyeset kiválasztania a versenyzőnek. Arra is lehetősége van, hogy egyszer a közönség segítségét kérje, ha egy kérdésre nem tudja a választ. Ilyenkor a közönségben ülők megnyomják az A , B , C , D gombok valamelyikét, aszerint, hogy melyik választ találják helyesnek. A számítógép egy statisztikát készít, és kiírja, hogy melyik betűre hányan tippeltek. Nézzük a következő példát:

Mennyi egy felnőtt férfi tüdejének légző felülete?

A : 50 cm^2 ; B : 1 m^2 ; C : 10 m^2 ; D : 50 m^2 .

A közönség tippjei: A : 5db, B : 6db, C : 19db és D : 27db. Te melyik választ jelölnéd meg helyesnek?

Statisztikus szemmel:

Ebben az adathalmazban a négy lehetőség közül a „ D ” fordult elő a legtöbbször, vagyis ez volt a leggyakoribb. Az adathalmaz legtöbbször előforduló elemét **módus**nak nevezzük.

117. Határozd meg a csoportok által végzett kísérletek esetén (gyufás skatulya, fej vagy írás stb.) a móduszokat!
118. Készíts felmérést az osztályban a diákok születési évéről! Mi ennek az adathalmaznak a módusza? Hogyan lehetne ezt hétköznapi nyelven megkérdezni?
119. Gyűjts olyan eseteket, amikor egy statisztikai felmérést azért végeznek, hogy megtudják, hogy mi módusza! (Ilyen volt például a Megasztár telefonos szavazása – aki a legtöbb szavazatot gyűjtötte az továbbjutott a következő fordulóba.)
120. Vizsgáljuk meg az utóneveinkből álló adatsort! Ki tudná megmondani, hogy mi a módusza ennek az adatsornak?

Sokszor az adathalmaz **átlaga** is fontos lehet számunkra. Nekem például fontos, hogy a ti matek epochazáróitok átlaga magas legyen, mert az azt jelenti, hogy a többség jól megértette és megtanulta az anyagot. Az előző iskolában év vége előtt biztos egy-egy tantárgyból az osztályzataid átlagát, hogy felkészítsd az otthoniakat a bizonyítványra.

Lássuk csak, mit is tettél ekkor! Szépen, egymás után összeadtad a jegyeidet, majd az összeget elosztottad az osztályzatok darabszámával.

121. Réka matekból tavaly ezeket a jegyeket szerezte: 5, 3, 4, 4, 5, 5, 3, 5, 4, 5. Mennyi az átlaga?
122. Pisti nagyon jó volt irodalomból. Az év során 8 ötöst és 2 négyest szerzett. Próbálj egyszerűen átlagolni! (Ha a szorzásjelet is használtad a számológépen, akkor dicséretet érdemelsz.)

123. A tanárértékelésen Gizike tanárnő ezeket a pontokat kapta a szuahéli kezdő csoport 10 gyerekeitől:

értékelés	1	2	3	4	5	6	7
darab	0	0	1	0	2	3	4

A szuahéli haladó csoport ezeket adta:

értékelés	1	2	3	4	5	6	7
darab	1	1	0	0	0	0	8

Számoljátok ki az átlagot mindkét csoportnál! Melyik csoportnak milyen lehet a hangulata? A tanárnőnek elég, ha a csoportátlagot tudja? Milyen más infót kéne ismernie (ha nem láthatja külön az összes jegyet)?

124. Most készíts négy olyan tanárértékelési táblázatot, amikben mind a 10 gyerek osztályozza Gizikét, és 5,5 az átlag! (Segítség: előbb azt számold ki, hogy hány pontot adtak összesen!) tedd sorrendbe őket aszerint, hogy melyik a legegységesebb és melyik a legmegosztottabb!
125. Különböző adatsorokat átlagoltam. Melyik a jó megoldás? **Számolás nélkül** mondd meg, viszont tudj indoklást hozzá!

a, Sanyika jegyei: 2; 3; 3; 4, 4, 5

A, 3,9 B, 4,3 C, 3,5 D, 3,9

b, Gusztáv öt epochaeredménye: 70%, 62%, 80%, 42%, 65% .

A, 51,2% B, 63,8% C, 43,5% D, 72,7%

c, Egy filmre adott pontszámok: 7; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9

A, 7,9 B, 7,85 C, 8,0 D, 8,1

d, Az év végi matekjegyek az évfolyamon:

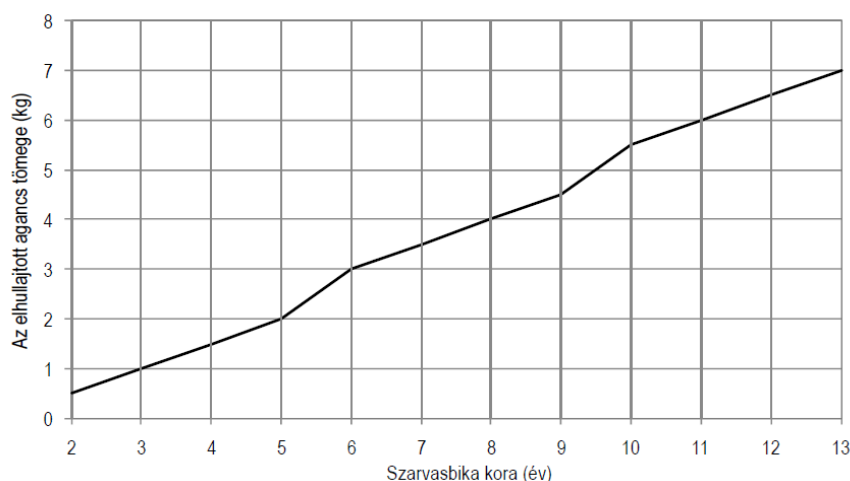
jegy	0	2	3	4	5
darab	0	1	6	10	8

A, 3,78 B, 3,26 C, 4,00 D, 4,88

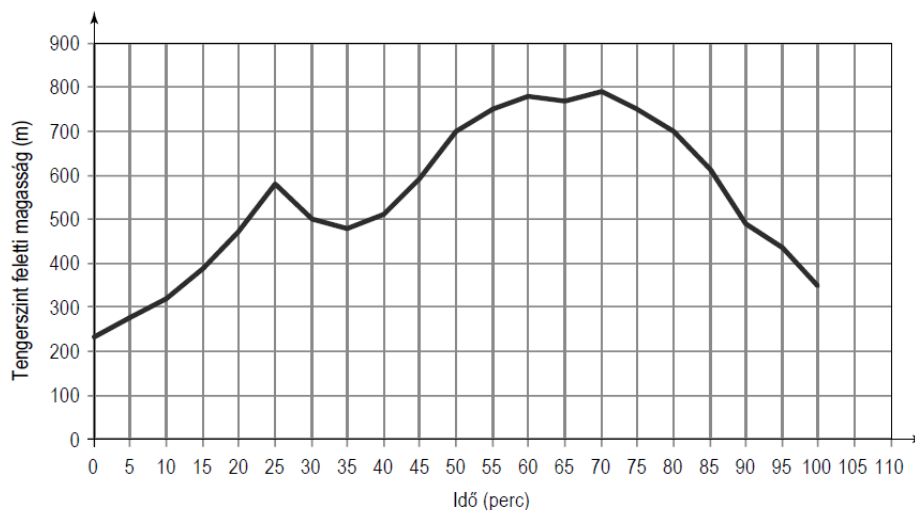
Gyakran az érdekel minket, hogy a növekvőleg rendezett adatsorban mi a középső elem, például ki áll a tornasorban középen. Ez az adatsor **mediánja**, vagyis középső eleme. Ha nincs középső eleme az adatsornak – mert páros számú elem van – ekkor a medián a két középső elem átlaga.

126. Réka tavalyi matekjegyeit ismerjük: 5, 3, 4, 4, 5, 5, 3, 5, 4, 5. Mennyi a mediánja?
127. Pisti nagyon jó volt irodalomból. Az év során 8 ötöst és 2 négyest szerzett. Add meg a mediánt!
128. Írj fel egy 5-10 elemből álló adatsort a következők szerint:
- Olyan adatsor, aminek módusza van, de átlaga nincs!
 - Olyan adatsor, aminek van átlaga, de módusza nincs!
 - Olyan adatsor, melynek nincs mediánja!
 - Olyan adatsor, melynek van mediánja, de nincs átlaga!

129. A következő diagram egy szarvasbika életkora és agancsának tömege közötti összefüggést mutatja.

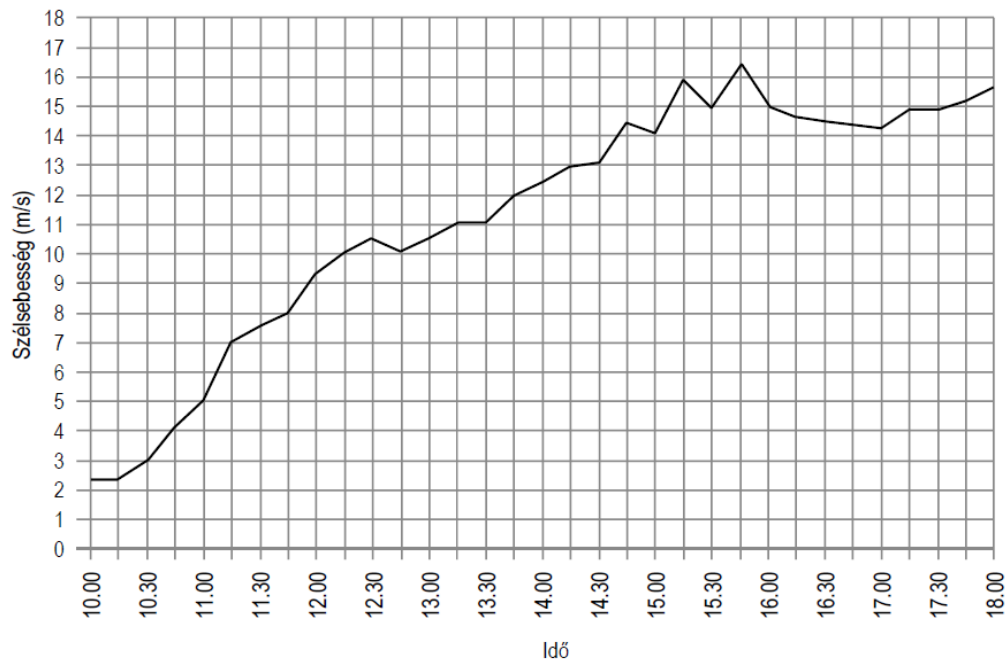


- Mennyi idős lehet az a szarvas, amelyik kb. 4kg-os agancsot visel?
 - Mekkora lehet a 6 és 8 év közötti szarvasok agancsa?
 - Mely életszakaszban növekszik legintenzívebben a szarvasok agancsa?
 - Egy vadasparkban 5 szarvas elhullajtott agancsát találták meg. Mekkora az átlagos tömegük, ha a szarvasbikák között volt egy 11 éves, egy 8 éves és három hároméves?
130. Gábor részt vett egy hőléggallonos kiránduláson. A felszállástól a leszállásig 5 percenként leolvasta a tengerszint feletti magasságot mutató műszerről a mért adatot, és azokból a következő grafikont készítette. Egészítsd ki a szöveget a grafikon alapján!

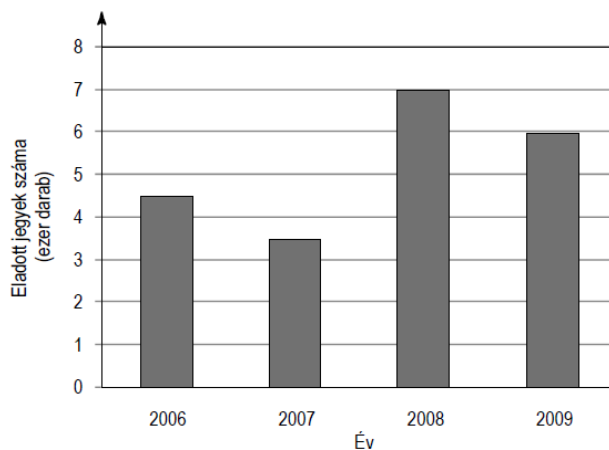


- A repülés percre tartott.
- A leszállás helyen történt, mint a felszállás. (magasabb/alacsonyabb)
- A fent töltött idő alatt alkalommal voltak éppen 600 méter magasságban.
- 700 méternél magasabban percet töltöttek.
- Gábor fogadást kötött a barátjával, hogy legalább az utazási idő felében 500 méter feletti magasságban lesz. A fogadást (megnyerte/elvesztette)

131. Egy tavon a vitorlázók biztonsága érdekében 12 m/s-os szélességtől sárga viharjelzés, 17 m/s-os szélességtől piros viharjelzés lép életbe. A következő grafikon a tónál elhelyezett szélességmérő berendezésének adatait mutatja. A grafikonok alapján dönts el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!



- Délután háromkor sárga jelzés volt életben.
 - Peti a sárga jelzés miatt csak délig tudott vitorlázni.
 - Délután fél négykor erősebb volt a szél, mint ötkor.
 - A sárga jelzés a nap folyamán legalább 5 órán keresztül érvényben volt.
 - A nap folyamán a szél erőssége egyenletesen növekedett.
132. A diagram egy évente megrendezésre kerülő ünnepi hangversenysorozatra megváltott jegyek számát szemlélteti négy évre vonatkozóan.
- Készíts az adatokból gyakorisági táblázatot! (A füzetbe dolgozz!)
 - Számítsd ki, hogy átlagosan hány jegy kelt el évente!
 - Mennyi volt az átlagos éves bevétel, ha 2006-ban 1200Ft-ba, 2007-ben 1300Ft-ba, 2008-ban 1500Ft-ba és 2009-ben 2000Ft-ba került egy jegy?
 - Hány százalékkal nőtt az eladott jegyek száma 2008-ban az előző évhez képest?
 - Milyen arányban változott a bevétel 2009-ben az előző évhez képest?



133. Egy kosárlabda klubban megmérték a lányok magasságát, és a következő eredményeket kapták: 181; 168; 173; 178; 182; 169; 173; 175; 178; 178; 179; 182; 182; 184; 172; 172, 169; 170; 178; 175; 177.

a. Mi a magasságok módusza és mediánja?

b. Sorold be az alábbi osztályokba a kapott adatokat:

magasság	165-170 cm	170-175 cm	175-180 cm	180-185 cm
darabszám				

c. Készíts oszlopdiaagramot a táblázat alapján!

134. A 30 fős kupac tavalyi mulasztott napjainak számát látod a táblázatban.

15	7	2	0	9	12
10	21	5	17	14	8
3	21	9	22	15	20
0	4	12	15	2	14
17	9	12	8	15	19

a. Sorold az adatokat 5 szélességű osztályokba!

b. Számítsd ki, hogy az egyes osztályokba hány százaléka tartozik a kupacnak!

c. Ábrázold kördiagramon az adatokat!

135. A Mammut gyorsétkezdéiben egy keddi napon felmérték az éttermekben ebédelők életkorát.

életkor (év)	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
fő	23	96	87	47	21	12	5

a. Meg tudod-e mondani, hogy hány veled egyidős fiatal ebédelt ott?

b. Ábrázold a felmérés eredményét kördiagramon! (Százalékot és középponti szöveget is számoldj!)

c. Számold ki a megfigyelt időszakban ott ebédelők átlagos életkorát! (Minden esetben az osztály középső értékével számoldj!)

136. Egy 20 oldalas dokumentumban az egyes oldalakon levő szavak száma található a táblázatban.

395	428	455	376	321
440	475	358	322	490
406	307	484	381	341
419	468	338	425	499

a. Számítsd ki a szavak oldalankénti átlagos mennyiségét!

b. Sorold 50 szélességű osztályokba az adatokat, és készíts erről táblázatot és kördiagramot!

c. Számíts átlagot az osztályba sorolt értékekkel is, mint az előző példa b) részében, és hasonlítsd össze az a)-ban számolt értékkel!

Feladatgyűjtemény

Halmazok

- F1** A következő meghatározások közül melyek **határoznak meg** egyértelműen egy-egy halmazt?
- {kupacunk tanulói}
 - {egy osztály tanulói}
 - {kupacunk fiútanulói}
 - {az AKG magas tanulói}
 - {a természetes számok}
 - {a természetes számok halmaza}
 - {egy egyenlet megoldásai}
 - {az $5(x-3)+2(2-3x)-11=3$ egyenlet valós megoldásai}
 - {a prímszámok}
 - {a legnagyobb prímszám}
 - {valamely három egész szám}
 - {prímszámok, a kupacunk tanulói}
 - {a legkisebb egész szám}
 - {a legkisebb természetes szám}
- Hány eleme van ezeknek a halmazoknak?
- F2** **Sorold fel** a következő halmazok elemeit!
- {100-nál kisebb négyzetszámok}
 - {Magyarország megyeszékhelyei}
 - {100-nál kisebb négyzetszámok száma}
 - {Az Európai unió államai 2010-ben}
 - {az olyan kétjegyű természetes számok, melyekben a számjegyek összege 6}
 - {243 pozitív osztói}
- Hány eleme van ezeknek a halmazoknak?
- F3** Adott két halmaz:
- $A := \{20\text{-nál kisebb prímszámok}\}$
 $B := \{30\text{ pozitív osztói}\}$
- Sorold fel** az A és a B halmaz elemeit!
 - Ábrázold a két halmazt Venn-diagrammon!
 - Felsorolással add meg az alábbi halmazok elemeit:
 $A \cup B =$ $A \cap B =$
 $A \setminus B =$ $B \setminus A =$
 - Milyen tulajdonságú számok vannak az $A \setminus B$ halmazban?
 - Milyen tulajdonságú számok vannak a $B \cap A$ halmazban?
- F4** $A = \{a; b; c; d; e\}$
- Adj meg olyan B halmazt, hogy $A \cap B = \{a; c; d\}$ legyen!
 - Adj meg olyan C halmazt, hogy $C \subset A$ legyen!
 - Adj meg olyan D halmazt, hogy $A \cup D = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$ legyen!
- F5** **Ábrázold** Venn-diagrammon a következő halmazokat: N, Z, Z^+, Q

- F6** **Határozd meg** az alábbi halmazokat a megfelelő számhalmaz jelöléssel vagy felsorolással.
- a. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^+ =$ b. $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z} =$
c. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} =$ d. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- =$
- F7** **Ábrázold** a következő halmazokat Venn-diagramm segítségével:
- a. A 10-zel, a 15-tel és a 20-szal osztható számok halmazai
b. A prímszámok, a 3-mal és a 12-vel osztható számok halmazai
c. A 6-tal, a 8-cal és a 24-gyel osztható számok halmazai
- F8** Adott az $A := \{a, b, c\}$ halmaz. **Add meg** az A halmaz összes részhalmazát!
- F9** Legyen $A := \{7; 8; 9; 10; 11\}$. Gondoltam egy B halmazra, elárulom, hogy $B \subseteq A$ és $|B| = 2$. Te megtippeled, mire gondoltam. **Sorold fel** a lehetséges tippjeidet! Mennyi a valószínűsége, hogy egyből eltalálsz, melyik halmazra gondoltam?
- F10** Adott két halmaz: $A := \{\text{húsznál kisebb, pozitív, hárommal osztható számok halmaza}\}$ és $B := \{1; 4; 9; 16\}$. **Sorold fel** az $A \cap B$, $A \cup B$ és az $A \setminus B$ elemeit!
- F11** Az A és a B halmazokról a következőket tudjuk:
 $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, és $A \setminus B = \{5; 7\}$.
Add meg az A és B halmaz elemeit!
- F12** **Ábrázold** Venn-diagrammon a következő halmazokat:
 $P := \{\text{paralelogrammák}\}$, $T := \{\text{trapézok}\}$, $D := \{\text{deltoidok}\}$, $G := \{\text{téglalapok}\}$
Határozd meg az alábbi halmazokat!
 $T \cap G =$
 $D \cap G =$
 $D \cap T =$
- F13** **Rajzold le** azon pontok halmazát, amelyek az adott P ponttól
- a. 3 cm-nél nagyobb és 5 cm-nél kisebb;
b. 3 cm-nél nem kisebb és 5 cm-nél kisebb;
c. 3 cm-nél nagyobb és 5 cm-nél nem nagyobb
d. 3 cm-nél nem kisebb és 5 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak!
Minden részfeladathoz külön ábrát készíts, és használj nyugodtan több színt és körzőt, vonalzót!
- F14** **Rajzold le** azon pontok halmazát, amelyek az adott P ponttól
- a. 3 cm-nél kisebb vagy 4 cm-nél nagyobb;
b. 3 cm-nél nem nagyobb vagy 4 cm-nél nem kisebb;
c. 3 cm-nél nagyobb vagy 4 cm-nél kisebb;
d. 3-cm-nél nem kisebb vagy 4 cm-nél nem kisebb távolságra vannak!
Minden részfeladathoz külön ábrát készíts, és használj nyugodtan több színt és körzőt, vonalzót!
- F15** **Rajzold le** azon pontok halmazát, amelyek az adott e egyenestől
- a. 3 cm;
b. 4 cm-nél kisebb;
c. 5 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak.
Minden részfeladathoz külön ábrát készíts, és használj nyugodtan több színt és körzőt, vonalzót!
- F16** Egy matematikaversenyen az első feladatot az indulók 70%-a, a második feladatot az indulók 60%-a oldotta meg helyesen. E két feladatot 9-en oldották meg helyesen. Hányan indultak a versenyen?

- F17** Egy osztály 28 tanulója közül 17-en rendelkeznek azonosítóval a Facebook-ra, és 15-en az IWIW-re. 11 olyan tanuló jár ebbe az osztályba, akinek mindkét közösségi portálra van azonosítója. Hány olyan tanulója van ennek az osztálynak, akinek egyik portálra sincsen azonosítója?
- F18** Egy osztály tanulóinak $\frac{1}{5}$ része volt ötös matematikából, 30%-a pedig történelemből. 4 tanuló mindkét tantárgyból ötöst kapott. Hányan nem kaptak ötöst egyik tantárgyból sem, ha az osztály létszáma 30?
- F19** Egy osztály tanulóinak $\frac{5}{6}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, 40%-a pedig közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztálylétszám 30?
- F20** 18 számot írtunk fel a táblára. Ezek közül 5 osztható 3-mal és 14 darab páros van közöttük. Két olyan szám szerepel a táblán, amelyik 6-tal osztható. Hány olyan szám van a táblán, amelyik páratlan
- a.** és osztható 3-mal; **b.** és nem osztható 3-mal;
c. vagy osztható hárommal; **d.** vagy nem osztható 3-mal?
- F21** Egy baráti társaság tagjai három kirándulást szerveztek. Mindegyik kiránduláson a társaság 15 tagja vett részt. Az első kirándulás résztvevői közül heten voltak jelen a másodikon és nyolcan a harmadikon. A második kirándulás 5 résztvevője ment el a harmadik kirándulásra. Négy olyan ember volt, aki háromszor kirándult. Hány fős ez a társaság?
- F22** Egy osztály létszáma 30. Az osztályban 3 nyelvet tanulnak? Angolt, németet és franciát. Mindenki tanul legalább egy nyelvet. Angolul 16-an, németül 18-an, franciául 14-en tanulnak. 16 tanuló pontosan 2 nyelvet tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

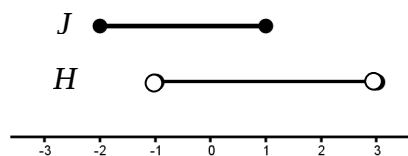
Intervallumok

- F23** **Ábrázold** számegyenesen az alábbi intervallumokat!

- a.** $[-5;3]$ **b.** $]0;6]$ **c.** $[-1;0[$ **d.** $] -4;3]$
e. $]4;5[$ **f.** $] -5,5;2]$ **g.** $]0,5;4]$ **h.** $[-1;5)$
i. $(-4,5;-4]$ **j.** $(3,5;4)$ **k.** $[40;70]$ **l.** $[2000;5000[$

- F24

- Ábrázold számegyenesen az $I = [2; 4[$ intervallumot!
- Ábrázold a számegyenesen a $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \leq 3\}$ halmazként megadott intervallumot!
- Add meg intervallumként a számegyenesen ábrázolt J intervallumot!
- Add meg halmazként a számegyenesen ábrázolt H intervallumot!

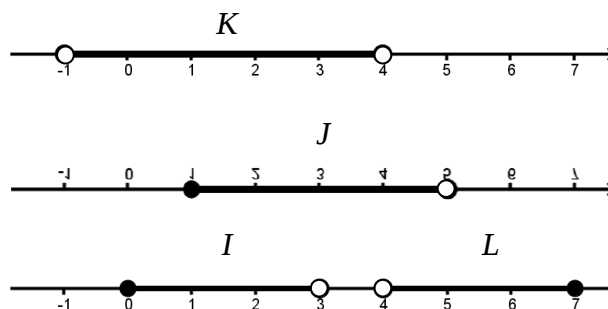


- F25** Adottak az alábbi intervallumok:

$$I = (0; 2] \quad J =]-1; 1[\quad K = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < 2\} \quad L = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

- Ábrázold ezen intervallumokat számegyenesen! Melyik zárt, nyitott, illetve félig nyitott vagy félig zárt?
- Van-e közöttük olyan, amely valamelyik másiknak a részhalmaza? Ha van, írd fel a tartalmazást!
- Add meg azt a leghosszabb intervallumot, amelyik a K halmaz valódi részhalmaza!
- Add meg azt a legrövidebb intervallumot, amelyik a K halmaz valódi részhalmaza!

F26 Figyeld meg a következő intervallumokat!



- Melyik nyitott, zárt, illetve félig nyitott, félig zárt?
- Írd fel intervallum jelölésekkel az $I, J, K, L, I \setminus J, K \setminus I, J \setminus L, I \cap J, J \cap L, J \cup L$ és $K \cup J$ halmazokat!
- Vannak-e diszjunktak az I, J, K, L intervallumok között? Adjuk meg őket!
- Legyen az alaphalmaz az $U = [-1; 7]$ intervallum. Határozd meg a $\bar{L}$ és $\bar{K}$ halmazokat!

F27 Ábrázold az $I = \left[-\frac{4}{5}; -\frac{7}{15}\right]$ intervallumot a számegyenesen! **Add meg** az I intervallumot halmazként is! **Adj meg** 4 olyan racionális számot, amely ebbe az intervallumba esik!

F28 Ábrázold számegyenesen a következő halmazokat!

- $G = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x < 3\}$
- $H = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } |x| < 3\}$
- $I = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } |x| \geq 4\}$
- $J = \{x \mid x \in \mathbf{R}^- \text{ és } |x+3| \geq 2\}$
- A H halmaz leírásában egy jelet megváltoztatva adjuk meg $\bar{H}$ -t, ha az univerzum a valós számok halmaza! Megtehető-e ez a többi halmazra is?
- Add meg a halmazokat intervallum jelöléssel!

F29 Adottak az $I = [4; 7]$, $J = [6; \infty[$, $K =]3; 6[$ és $L =]2; 5]$ intervallumok. **Ábrázold számegyenesen** és **írd fel** intervallum formában a következő halmazokat:

- $L \cap K; K \cap I; I \setminus J; J \setminus I; (L \cup I) \setminus K; (K \cup J) \setminus L$.
- Legyen az alaphalmaz $U =]2; \infty[$. Határozd meg az $\bar{L}, \bar{J}, \overline{I \cup J}, \overline{I \cup K}, \overline{J \cup K \cup L}$ halmazokat intervallum formában!

F30

- Oldd meg az $\frac{x-1}{3} + 2 > 0$ és $\frac{x}{2} - \frac{4,5}{3} \leq 0$ egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
- Ábrázold a megoldáshalmazokat számegyenesen, és add meg intervallum jelöléssel is!
- Jelölje I az első, J a második egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Határozd meg a következő halmazokat: $I \cap J; I \setminus J; J \setminus I$.
- Mivel egyenlő az $I \cup J$ halmaz?

Tájékozódás a koordináta-rendszerben

F31 Ábrázold az alábbi pontokat koordináta-rendszerben!

- | | | | |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| a. $A(2; 1)$ | b. $B(-1; 4)$ | c. $C(5; 5)$ | d. $D(5; 0)$ |
| e. $E(-7; 3)$ | f. $F(-6; 0)$ | g. $G(9; 3)$ | h. $P(10; 0)$ |
| i. $Q(-9; -1)$ | j. $R(8; -2)$ | k. $S(-2; -2)$ | l. $T(0; -3)$ |
| m. $U(2; 2)$ | n. $V(4; -6)$ | o. $K(-5; -4)$ | p. $L(10; -6)$ |

F32 Ábrázold koordináta-rendszerben!

$A(-3;2)$, $B(1;3)$, $C(-4;1)$, $D(4;-1)$; $E(0;5)$, $F(-3;0)$!

Tükrözd a pontokat, és **olvasd le** a kapott pontok koordinátáit

- | | |
|---|----------------------|
| a) az x tengelyre; | b) az y tengelyre; |
| c) a koordináta-rendszer szögfelezőire; | d) az origóra! |

Fogalmazd meg a tapasztalataidat!

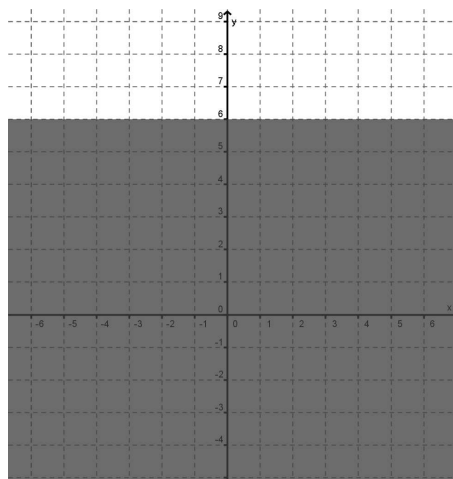
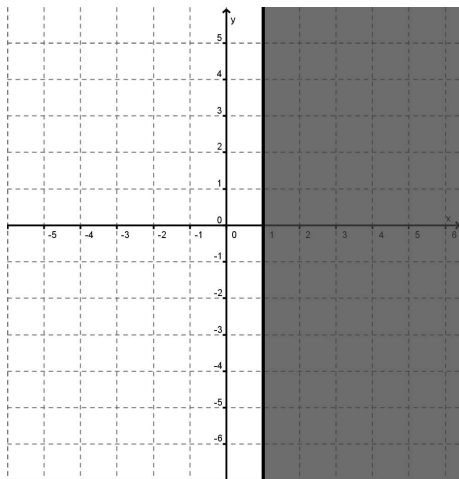
F33 Színezd ki a koordináta-rendszernek azt a tartományát, amelynek a pontjai megfelelnek az alábbi feltételeknek!

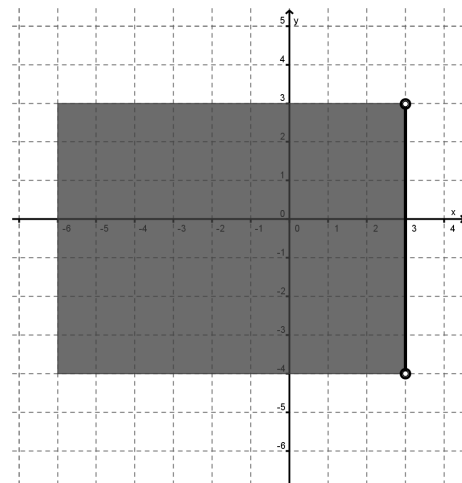
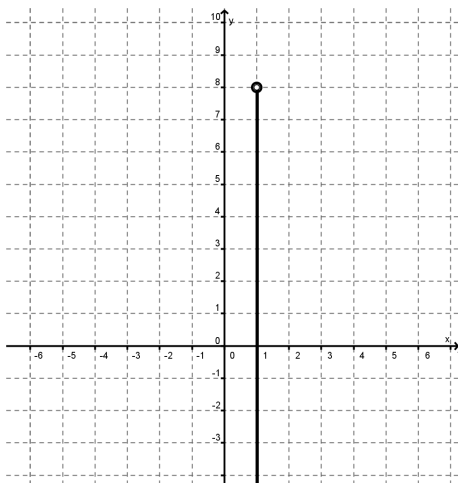
- | | | | | | |
|-------------|------------|---------------|------------|------------|----------------|
| a. $x = -2$ | b. $x > 5$ | c. $x \leq 1$ | d. $y = 3$ | e. $y < 5$ | f. $y \geq -4$ |
|-------------|------------|---------------|------------|------------|----------------|

F34 Adott a következő két ponthalmaz: $A = \{(x; y) | x, y \in \mathbf{R} \text{ és } y \geq 1\}$, $B = \{(x; y) | x, y \in \mathbf{R} \text{ és } x \geq 2\}$. **Ábrázold** a következő ponthalmazokat koordináta-rendszerben!

- | | | |
|---------------|---------------|--------------------|
| m. $A \cap B$ | n. $A \cup B$ | o. $A \setminus B$ |
|---------------|---------------|--------------------|

F35 Jellemezd az alábbi tartományokat! Figyelj arra, hol kell $\leq$ vagy $\geq$ jeleket írni!





F36 A ceruza felemelése nélkül **kösd össze** a koordinátarendszerben a következő koordinátákkal megadott pontokat:

$(-2; -2)$ $(2; 2)$ $(2; -2)$ $(-2; -2)$ $(-2; 2)$ $(2; 2)$ $(0; 4)$ $(-2; 2)$ $(2; -2)$

F37 A ceruza felemelése nélkül **kösd össze** a koordinátarendszerben a következő koordinátákkal megadott pontokat:

$(-4; 0)$ $(-2; 2)$ $(0; 0)$ $(2; -2)$ $(4; 0)$ $(2; 2)$ $(0; 0)$ $(-2; -2)$ $(-4; 0)$

Függvények

F38 A következő hozzárendelések közül **válaszd ki** a függvényeket! Minden hozzárendeléshez **írd** 3-3 példát! Ha az nem függvény, írd olyan példát is, ami bebizonyítja, hogy a hozzárendelés nem egyértelmű! **Válaszd ki** a kölcsönösen egyértelmű függvényeket!

- Első halmaz: a sokszögek, második halmaz: a pozitív számok. A sokszögekhez rendeljük hozzá a belső szögeinek összegét.
- Első halmaz: síkbeli alakzatok, második halmaz: síkbeli alakzatok. Továbbá adott egy t tükörtengely. Minden síkbeli alakzathoz rendeljük hozzá a t tengelyre vonatkozó tükörképét.
- Első halmaz: pozitív egész számok, második halmaz: prímszámok. Minden pozitív egész számhoz rendeljük hozzá a prímosztóit.
- Első halmaz: kétjegyű egész számok, második halmaz: kétjegyű egész számok. Minden kétjegyű, egész számhoz rendeljük hozzá azt a kétjegyű egész számot, amelynek a négyzete ugyanarra a számjegyre végződik.
- Első halmaz: egész számok, második halmaz: egyjegyű számok. Minden egész számhoz rendeljük hozzá azt az egyjegyű számot, amely számjegyre a szám négyzete végződik.
- Első halmaz: természetes számok, második halmaz: természetes számok. A természetes számokhoz a náluk nagyobb természetes számokat rendeljük hozzá.
- Első halmaz: természetes számok, második halmaz: természetes számok. Minden természetes számhoz a nála eggyel nagyobb természetes számot rendeljük hozzá.
- Első halmaz: racionális számok, második halmaz: a számegyenes pontjai. Egy-egy számhoz a számegyenes azon pontját rendeljük hozzá, ami az adott számnak a helye.
- Első halmaz: a racionális számokból alkotott rendezett párok, második halmaz: A koordinátasík pontjai. Egy-egy számpárhoz a sík egy-egy pontját rendeljük hozzá. (A számpár a pont két jelzőszáma a derékszögű koordináta-rendszerben)

F39 A következő függvényeknek **határozd meg** az értelmezési tartományát, és **számold ki** a megadott helyeken a helyettesítési értéket!

$$f : x \mapsto 3x + \frac{1}{2x-3} \quad \text{ÉT:} \quad f(-2) = \quad f\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$g : x \mapsto -(x-1)^2 + |x| \quad \text{ÉT:} \quad g(-2) = \quad g(0,5) =$$

$$h : x \mapsto 2x + \frac{1}{2x-1} \quad \text{ÉT:} \quad h(-2) = \quad h\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$i : x \mapsto -|x-1| + x^2 \quad \text{ÉT:} \quad i(-2) = \quad i(0,5) =$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

ÉT:

$$f(-1) =$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$g(x) = \frac{1}{2}|x-3| + x^2$$

ÉT:

$$g(0,2) =$$

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) =$$

F40 Javítsd ki a következő dolgozatrészletet! A helyes megoldásokat **pipáld ki**, a hibásakat **húzd alá**, és **írd oda** a jó megoldást!

Képlet

É.T.

Helyettesítési érték

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$x \in \mathbf{R}$$

$$f(0) = 2$$

$$f(-2) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$g(x) = |x-1|$$

$$x \in \mathbf{R}$$

$$g(-2) = 3$$

$$g(1) = 0$$

$$g(0) = -1$$

$$h: x \mapsto \frac{1}{x-3}$$

$$x \in \mathbf{R}$$

$$h(3) = \text{nincs értelmelve}$$

$$h(-1) = -\frac{1}{4}$$

$$h(4) = -1$$

F41 Adott a következő függvény: $f: x \mapsto \frac{x}{x+3} - 2x^2$.

a. Add meg a függvény helyettesítési értékét a következő helyeken: -3; -1; 2; $\frac{1}{2}$; 11,7!

b. Számítsd ki: $f(-2) =$ $f\left(\frac{3}{2}\right) =$

F42 Egy oldatot a forráspontjáig felmelegítenek, egy darabig forralják, majd hűlni hagyják. Ezt mutatja be a grafikon.

a. Kezdetben mennyi volt az oldat hőmérséklete?

b. Hány perc alatt érte el az oldat a forráspontját?

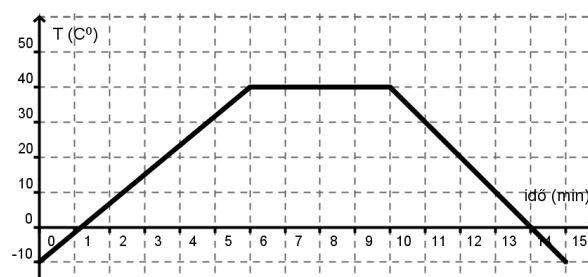
c. Melegítés közben percenként hány fokkal nőtt az oldat hőmérséklete?

d. Hűlés közben percenként hány fokkal nőtt az oldat hőmérséklete?

e. Hány fok az oldat forráspontja?

f. Hány percig forralták az oldatot?

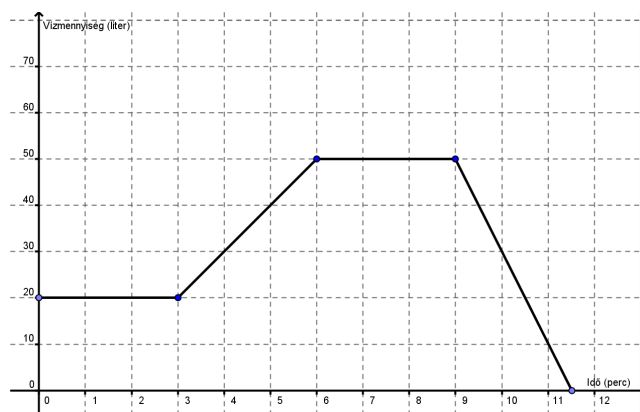
g. A kísérlet kezdetétől számítva mikor volt az oldat hőmérséklete 10 fok?



F43 Egy kádban kezdetben 20 liter víz volt. A csapból a kádat egy idő után teljesen feltöltötték. Kis idő múlva a vizet a lefolyón keresztül teljesen leengedték. Ezt mutatja a grafikon.

a. Mennyi ideig volt nyitva a csap?

- b. Hány perc alatt ürül ki a kád?
- c. Hány percig nem változott a vízmennyiség a kádban?
- d. Egy perc alatt hány liter víz folyik ki a csapból?
- e. Hány liter víz fér a kádba?
- f. Egy perc alatt mennyi víz folyik ki a lefolyón?
- g. Mikor volt a kádban 30 liter víz?



F44 Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$$

$$g : x \mapsto -x + 5$$

- a. A g függvény meredeksége: $m =$
- b. A g függvény az y tengelyt a metszi
- c. Adj meg olyan függvényt, amelynek grafikonja párhuzamos a f függvénnyel!
- d. Legyen $A(1, ?)$ és $B(?, 2)$. Add meg a pontok hiányzó koordinátáját, hogy ezek az f függvény grafikonjára essenek!
- e. Milyen x -ekre igaz, hogy $f(x) < g(x)$?
- f. Milyen x -ekre igaz, hogy $g(x) > 0$?

F45 Ábrázold az alábbi feltételeknek eleget tevő egyeneseket, és írd fel a grafikonokhoz tartozó lineáris függvények hozzárendelési szabályt is!

f : Átmegy a $(-3; 0)$ és $(3; 4)$ pontokon.

g : Átmegy az origón és a $(2; -4)$ ponton.

h : Átmegy az origón és az $(6; 5)$ ponton.

i : Meredeksége $-\frac{2}{3}$ és átmegy a $(0; -2)$ ponton.

F46 Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta rendszerben!

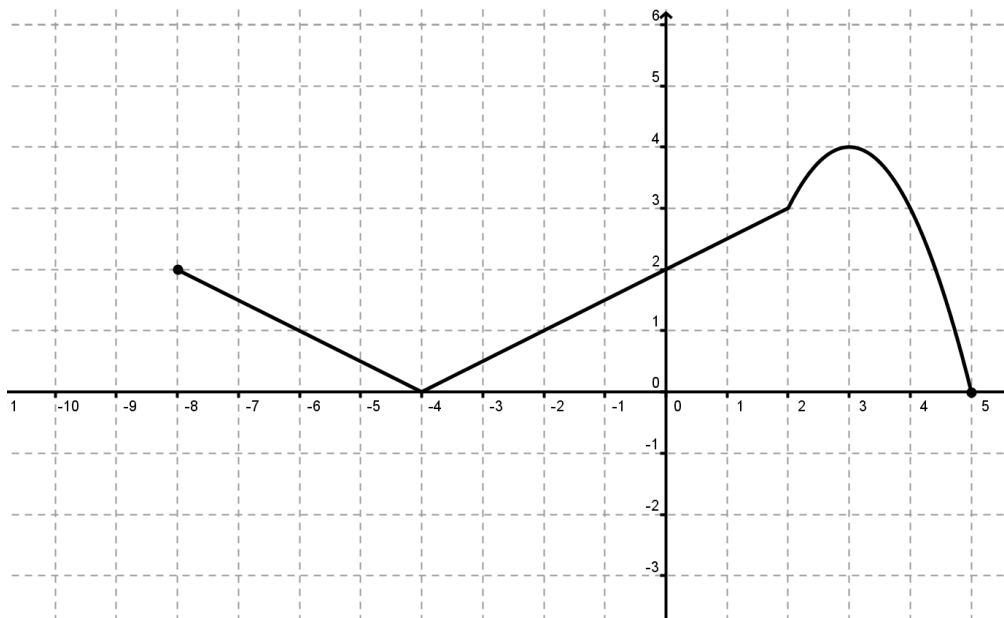
$$f : x \mapsto (x - 2)^2 - 2$$

$$g : x \mapsto -x + 2$$

- a. A g függvény meredeksége: $m =$
- b. Az f függvény legkisebb értéke:
- c. Adj meg olyan függvényt, amelynek grafikonja párhuzamos a g függvénnyel!
- d. Legyen $A(1, ?)$ és $B(?, 2)$. Add meg a pontok hiányzó koordinátáját, hogy ezek az f függvény grafikonjára essenek!
- e. Milyen x -ekre igaz, hogy $f(x) < g(x)$?
- f. Milyen x -ekre igaz, hogy $g(x) > 0$?

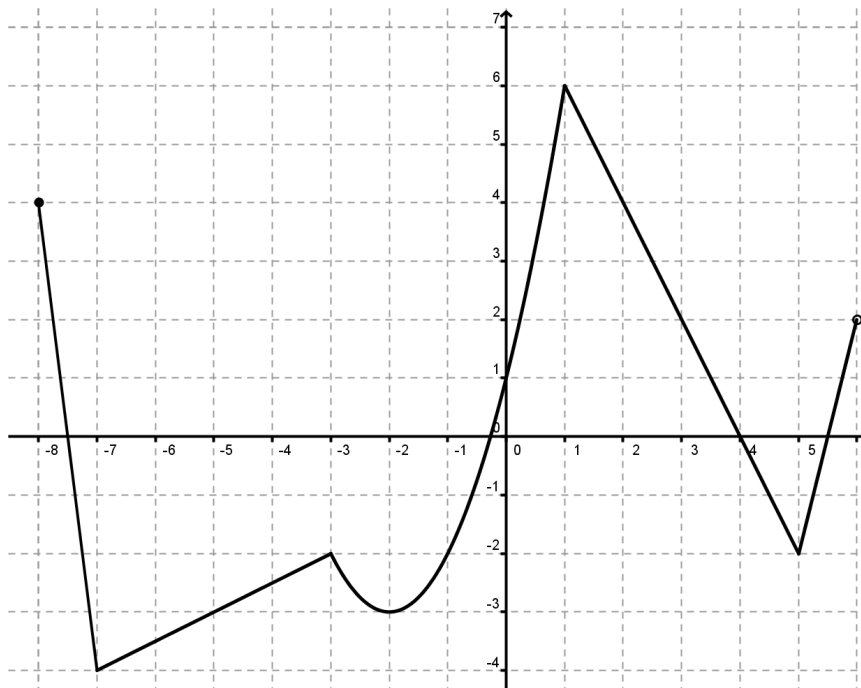
F47 Az $f(x)$ függvény grafikonját látod az ábrán.

- Határozd meg a függvény helyettesítési értékét a következő helyeken: -6, -3, 0, 3, 6!
- Mennyi $f(-7)$, $f(2)$?
- Rajzold bele az ábrába pirossal az ábrába az $f(x+1)$ függvény grafikonját!
- Rajzold bele kékkel az ábrába az $f(x)-2$ függvény grafikonját!
- Jellemezd a függvényt!



F48 A $g(x)$ függvény grafikonját látod az ábrán.

- Határozd meg a függvény helyettesítési értékét a következő helyeken: -7, -1, 3, 6!
- Mennyi $g(-5)$, $g(2,5)$?
- Rajzold bele kékkel az ábrába az $g(x)+1$ függvény grafikonját!
- Jellemezd a függvényt!



Függvény-transzformációk

F49 Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

a. $x \mapsto |x-2|$

b. $x \mapsto x^2 + 3$

c. $x \mapsto |x|-3$

d. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

e. $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$

f. $x \mapsto (x-2)^2 + 1$

F50 Egy-egy feladatcsoportot ugyanabban a koordináta-rendszerben **ábrázolj**, de a különböző függvények grafikonját **más színnel rajzold!**

a. $x \mapsto |x|$
 $x \mapsto |x| + 2$

b. $x \mapsto x^2$
 $x \mapsto (x-1)^2$

c. $x \mapsto x^2$
 $x \mapsto -x^2$

a. $x \mapsto |x| - 1$
 $x \mapsto |x| + 3$
 $x \mapsto |x| - 4$

b. $x \mapsto (x+2)^2$
 $x \mapsto (x-3)^2$
 $x \mapsto (x-4)^2$

c. $x \mapsto \frac{1}{x}$
 $x \mapsto -\frac{1}{x}$
 $x \mapsto -|x|$

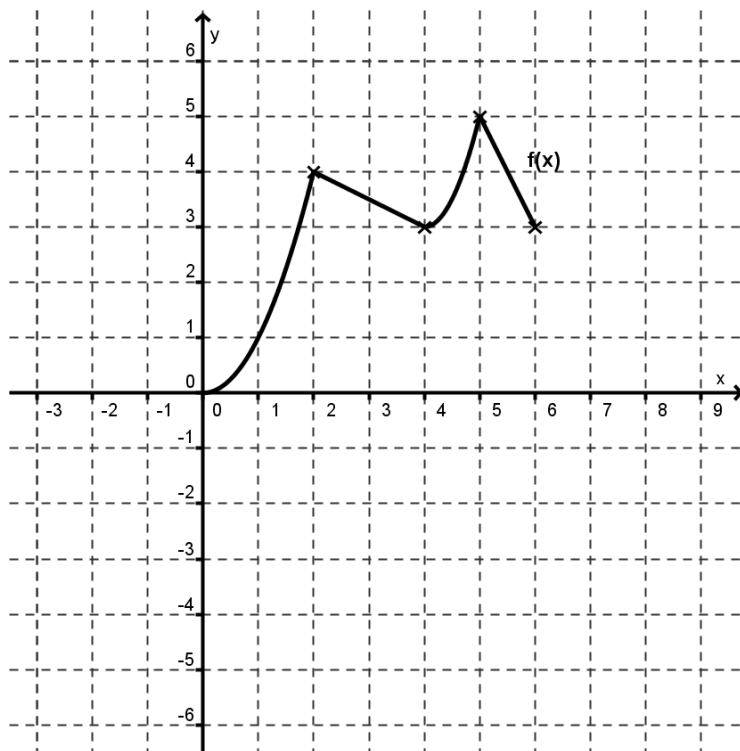
d. $x \mapsto -|x| + 2$
 $x \mapsto |x+1| - 3$
 $x \mapsto -x^2 - 3$
 $x \mapsto (x-2)^2 + 1$
 $x \mapsto -|x+3| + 2$
 $x \mapsto -(x+2)^2 + 3$

e. $x \mapsto \frac{1}{x-1}$
 $x \mapsto \frac{1}{x+2}$
 $x \mapsto \frac{1}{x-2} + 2$
 $x \mapsto \frac{1}{x+3} - 1$

f. $x \mapsto 4 - (x-2)^2$
 $x \mapsto 2 - \frac{1}{x-3}$
 $x \mapsto 2|x-1| - 3$
 $* x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

g. Ábrázold!

$x \mapsto f(x) + 1$
 $x \mapsto f(x) - 2$
 $x \mapsto f(x+1)$
 $x \mapsto f(x-2)$
 $x \mapsto -f(x)$



F51 A grafikonok transzformációjának segítségével **ábrázold**:

a. $x \mapsto |x+1|+5$

b. $x \mapsto \operatorname{sgn} x + 2$

c. $x \mapsto (x-2)^2$

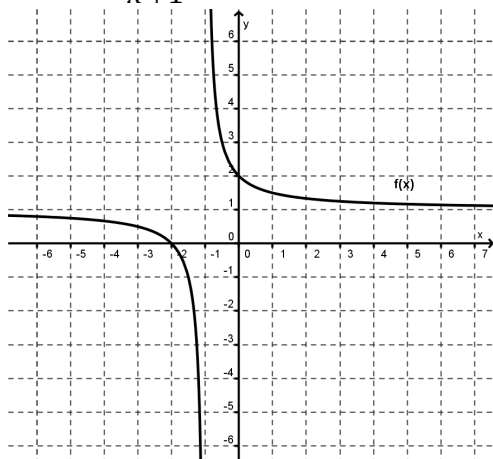
d. $x \mapsto \lfloor x \rfloor - 1$

e. $x \mapsto \frac{1}{x+2} + 5$

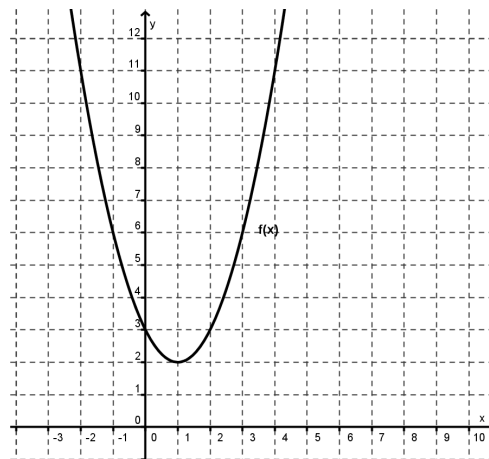
f. $x \mapsto \frac{1}{x-3} + 1$

F52 Az alábbi grafikonok mellett ott voltak a megfelelő hozzárendelési szabályok. Ezek közül néhányat valaki átírt. **Javítsd ki!**

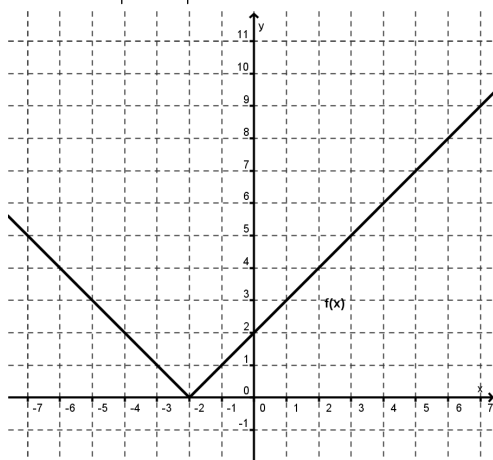
a. $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$



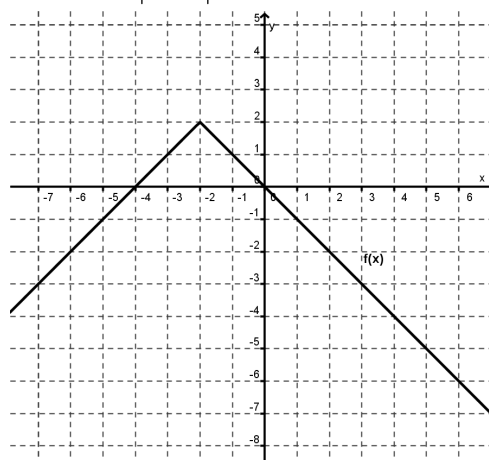
b. $x \mapsto (x+1)^2 + 2$



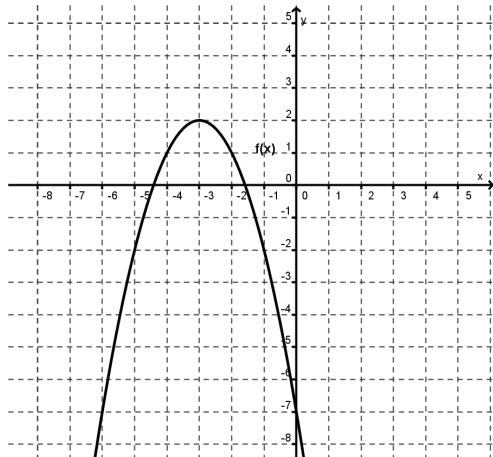
c. $x \mapsto |x+2|$



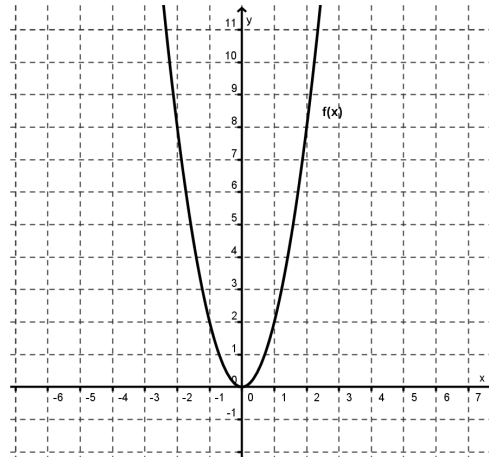
d. $x \mapsto -|x+2| + 2$



e. $x \mapsto -(x+3)^2 + 2$

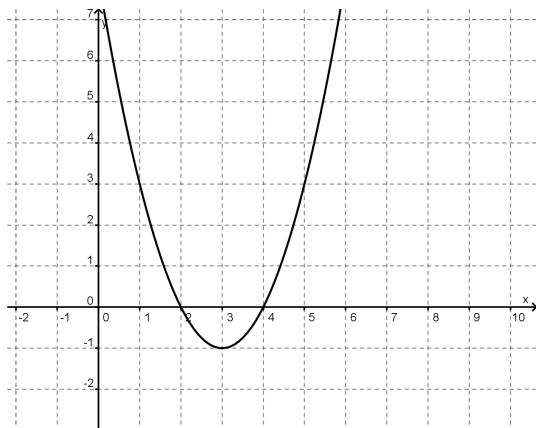


f. $x \mapsto 2x^2$

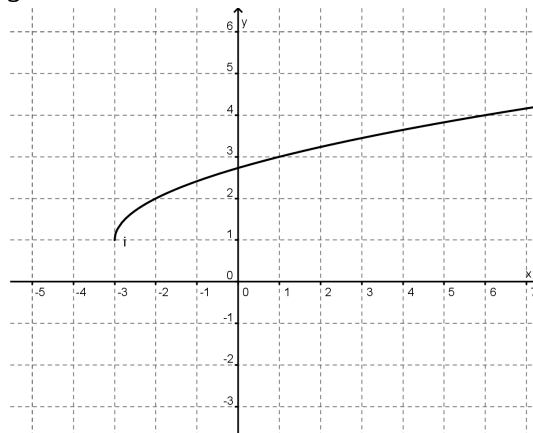


F53 Add meg a következő függvények hozzárendelési szabályát!

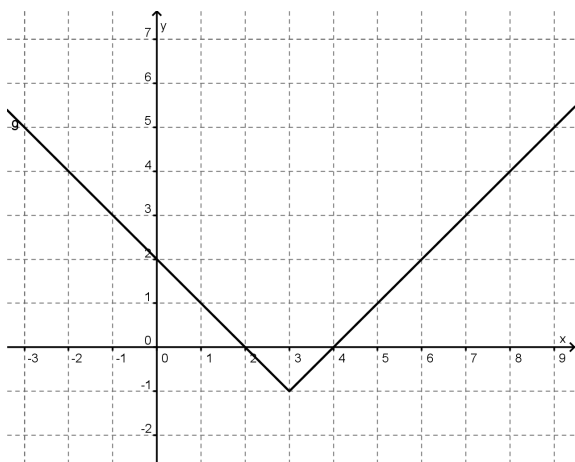
$$f(x) =$$



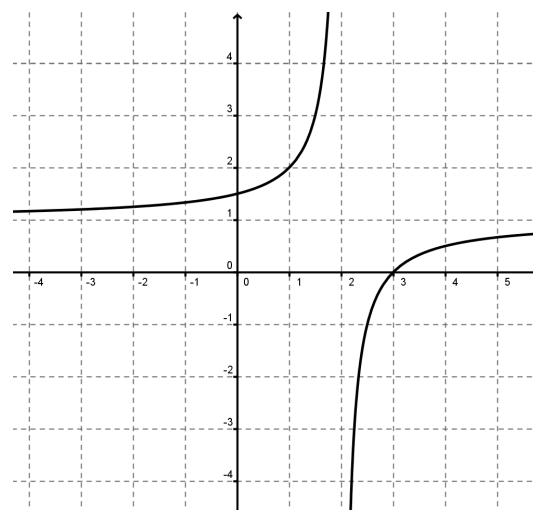
$$g : x \mapsto$$



$$h(x) =$$

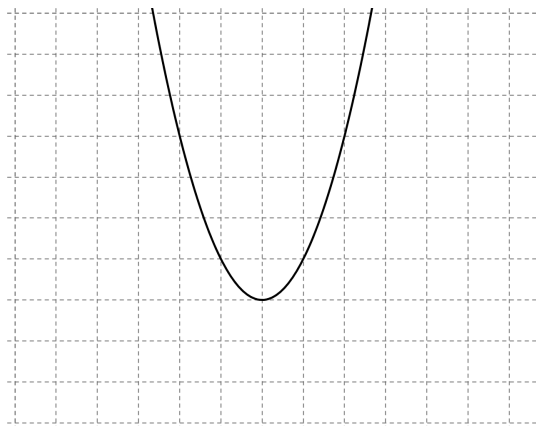


$$i : x \mapsto$$



F54 Rajzold be a koordináta tengelyeket, ha adott a függvény hozzárendelési szabálya és a grafikonja!

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3$$



$$g(x) = \frac{1}{x-1} - 1$$



F55 Képzeld magad elé a függvény grafikonját és így **válaszolj** a következő kérdésekre! (Ha így nem megy, akkor vázold fel a grafikonot!) Dolgozz a füzetbe!

$$f : x \mapsto |x-2|+3$$

$$g : x \mapsto -|x+1|+4$$

$$h : (x+1)^2 - 4$$

$$k : x \mapsto \frac{11-4x}{2}$$

$$l : x \mapsto \frac{1}{x+3} - 1$$

$$m : x \mapsto -(x-3)^2 + 1$$

$$n : x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$$

$$r : x \mapsto \frac{(x+2)(x+3)-(x-1)^2}{3}$$

$$p : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

- Hol metszik a grafikonok az x tengelyt?
- Hol metszi a $g(x)$, $r(x)$ grafikonja az y tengelyt?
- Van-e maximuma az $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $l(x)$ és $m(x)$ függvényeknek? Ha igen, hol és mennyi?
- Van-e minimuma a $g(x)$, $h(x)$ és $k(x)$ függvényeknek? Ha igen, hol és mennyi?
- Milyen x értékekre igaz, hogy az $f(x)$, $h(x)$ és $k(x)$ szigorúan monoton növekvő?
- Milyen x értékekre igaz, hogy az $f(x)$, $g(x)$, $m(x)$ és $r(x)$ pozitív értéket vesz fel?
- Mi az értelmezési tartománya $g(x)$, $l(x)$, $n(x)$, $p(x)$ és $r(x)$ függvényeknek?
- Mi az értékészlete az $f(x)$, $k(x)$, $l(x)$, $m(x)$, $n(x)$ és $p(x)$ függvényeknek?

F56 **Ábrázold** a következő függvényeket!

$$h : x \mapsto |(x+1)^2 - 9| \quad i : x \mapsto \|x-2|-2| \quad j : x \mapsto \|x-2|-1|-3|-1 \quad k : x \mapsto \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right|$$

$$l : x \mapsto \|x-1|-3|-2 \quad m : x \mapsto |\sqrt{x-2}-2| \quad n : x \mapsto |(x-2)^2 - 4|$$

F57 ****Ábrázold** a következő függvényeket:

$$a. \quad f : x \mapsto |x-1|+|x+1|$$

$$g : x \mapsto |x-2|-|x+2|$$

$$h : x \mapsto |x-2|+|x+2|$$

$$i : x \mapsto |x-3|+|x+3|$$

$$b. \quad f : x \mapsto x^2 - 4x + 4$$

$$g : x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$h : x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

$$j : x \mapsto x^2 + 2x + 4$$

$$c. \quad f : x \mapsto \frac{x-1}{x}$$

$$g : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$$

$$h : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

$$i : x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$$

F58 **Ábrázold és elemezd** a következő függvények grafikonját!

$$a. \quad x \mapsto -|x-2|+3 \quad \text{ha } -1 \leq x \leq 5$$

$$b. \quad x \mapsto -|x-2|+3 \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$$

$$c. \quad *x \mapsto |x+2|+|x-3| \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$$

$$d. \quad *x \mapsto |x+4|-|x-1| \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$$

$$e. \quad x \mapsto -4x \quad \text{ha } x \in \mathbf{N}^+$$

$$f. \quad x \mapsto -\left(-(x+2)^2 + 1\right) \quad \text{ha } x \in]-6; 3[$$

g. $x \mapsto x^2 - 1 \quad \text{ha } x \in \mathbf{N}^+$

h. $x \mapsto -|x+3| + 2 \quad \text{ha } x \in \mathbf{N}^+$

i. $x \mapsto x - 3 \quad \text{ha } x \in \mathbf{N}^+$

j. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$

k. $*x \mapsto \frac{2x+3}{x+1} \quad \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

l. $x \mapsto |-(x-1)^2 - 4| \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$

m. $*x \mapsto \left\| |x+1| + 2 \right\| + 3 \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$

n. $*x \mapsto \lfloor x - 3 \rfloor \quad \text{ha } x \in \mathbf{R}$

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

F59 A következő függvényeknél **hogyan válasszuk meg** az x értékét, hogy a függvény értéke

a. pozitív legyen;

b. negatív legyen;

c. 0 legyen;

d. 3-nál nagyobb legyen?

$$f : x \mapsto -(x+3)^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - 3$$

$$h : x \mapsto |x-1| - 2$$

$$i(x) = \frac{4-3x}{2}$$

$$j(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

F60 Oldd meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket! (Dolgozz grafikusan!)

a. $|x+2| - 3 > 0$

b. $-(x+2)^2 \geq 1$

c. $\frac{1}{x-2} + 1 > 0$

d. $(x-3)^2 - 1 \leq 0$

e. $-|x-1| + 4 \geq 0$

f. $|x+2| - 3 = 4$

g. $-|x-2| = 1$

h. $3 - |x-2| = 3$

i. $(x+1)^2 = 4$

j. $4 - (x-3)^2 \leq 0$

k. $|x-3| + |x+3| \geq 0$

l. $\operatorname{sgn}(x) > 2$

F61 Milyen x -ekre teljesül, hogy

a. $|x+2| = x+2$

b. $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

c. $|x+4| \geq -3x+4$

d. $3x+7 = -|x+2|+1$

e. $-(x+1)^2 = |x-3|$

f. $x-3 = -|x-3|$

g. $-(x-2)^2 \geq 2x-3$

h. $|4x| > |x|$

i. $x^2 < |x|$

j. $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x-5}{|x-5|}$

k. $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

l. $(x-4)^2 \leq x-4$

m. $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

n. $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$

o. $\frac{2x-5}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$

Csoportosítsd az előbbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket aszerint, hogy

- nincs megoldása;
- egy megoldása van;
- több megoldása van;
- az értelmezési tartomány minden eleme megoldás (azonosság)!

F62 Keress az alábbiak között olyan függvényeket, amelyeknek vagy az értelmezési tartománya, vagy az értékkészlete, vagy mindkettő megegyezik! **Vázold** a függvények grafikonját!

$$\begin{array}{lll} f(x) = 7 - 3x & g(x) = \frac{(7-3x)(x-2)}{x-2} & h(x) = \frac{(2x-3)(x-2)}{x-2} \\ k(x) = \frac{7(x-2)}{3x-6} & m(x) = \frac{7x+14}{3x+6} & n(x) = \frac{7x(x+2)}{6x+12} \\ p(x) = \frac{7x^2-14x}{6x-12} & q(x) = \frac{x}{x-2} & r(x) = \frac{6x+13}{3x+6} \end{array}$$

Mely x-re igaz, hogy

- | | | | |
|-------------------------|-------|-------------------------|-------|
| a. $f(x) = -2$ | $x =$ | b. $g(x) = -1$ | $x =$ |
| c. $k(x) = 0$ | $x =$ | d. $n(x) = -1$ | $x =$ |
| e. $q(x) = 1$ | $x =$ | f. $m(x) = \frac{7}{3}$ | $x =$ |
| g. $p(x) = \frac{7}{3}$ | $x =$ | h. $p(x) = q(x)$ | $x =$ |
| i. $m(x) = r(x)$ | $x =$ | j. $h(x) = k(x)$ | $x =$ |

F63 Ábrázold az alábbi függvényeket!

- | | |
|---|---|
| a. $f(x) = x + 3$ | b. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ |
| c. $h(x) = \frac{4 - 4x + x^2}{x - 2}$ | d. $k(x) = \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$ |
| e. $l(x) = \frac{x - 3}{ x - 3 }$ | f. $m(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ |
| g. $n(x) = \frac{5(x-3)(x+2)(x-2)}{x^2 - 4}$ | h. $p(x) = \frac{(x+5)(3x-7)(x+2)(x-4)}{(x+5)(x+2)(x-4)}$ |
| i. $s(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x}$ | j. $t(x) = \frac{(x+2)(4x+3) - (x+2)(5x+1)}{3x+6}$ |
| k. $u(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-1)(x-3)(x-5)}$ | l. $v(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{ha } x \neq 3 \\ 5, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$ |

Csoportosítsd őket a következők szerint!

a. Értelmezési tartomány

$$\begin{array}{llll} x \in \mathbf{R}; & x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}; & x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}; & x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}; \\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}; & x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}; & \text{egyéb.} & \end{array}$$

b. Értékkészlet

$$\begin{array}{llll} f(x) \in \mathbf{R}; & f(x) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; & f(x) \in \mathbf{R} \setminus \{6\}; & f(x) \in \mathbf{R} \setminus \{0; 9\}; \\ f(x) \in \mathbf{R} \setminus \{3\}; & \text{egyéb.} & & \end{array}$$

Mely x -re igaz, hogy

$$\begin{array}{ll} \text{a. } n(x) = p(x) & x = \\ \text{b. } g(x) = h(x) & x = \\ \text{c. } l(x) = 5 & x = \\ \text{d. } f(x) = k(x) & x = \\ \text{e. } k(x) = m(x) & x = \\ \text{f. } v(x) = f(x) & x = \end{array}$$

Gyakorló feladatok

F64 **Ábrázold** a következő függvényeket, és **állapítsd meg** az értékkészletüket!

$$\text{a. } x \mapsto \begin{cases} x+1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-2x, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{b. } x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{x}, & \text{ha } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

F65 **Milyen x -ekre** lesz a következő függvények értéke 13?

$$\text{a. } x \mapsto 3x-1$$

$$\text{b. } x \mapsto |3x-1|$$

$$\text{c. } x \mapsto \frac{1}{3x-1}$$

$$\text{d. } x \mapsto -(3x-1)$$

$$\text{e. } x \mapsto |3x|-1$$

$$\text{f. } x \mapsto \frac{1}{3x}-1$$

F66 **Van-e** a következő függvényeknek **legkisebb értéke**, és ha van, akkor ez mennyi?

$$\text{a. } x \mapsto \frac{1}{2}x-5$$

$$\text{b. } x \mapsto \left| \frac{1}{2}x-5 \right|$$

$$\text{c. } x \mapsto -\frac{1}{2}x-5$$

$$\text{d. } x \mapsto \left| \frac{1}{2}x \right| - 5$$

$$\text{e. } x \mapsto -\left| \frac{1}{2}x \right| - 5$$

$$\text{f. } x \mapsto -\left| \frac{1}{2x} - 5 \right|$$

$$\text{g. } x \mapsto \left(\frac{1}{2}x-5 \right)^2 - 3$$

F67 Ábrázold a következő függvényeket! Van-e közöttük azonos?

a. $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b. $x \mapsto x + 1$

c. $x \mapsto \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \neq 1 \\ 5 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

d. $x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha } x \neq 1 \\ 2 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

e. $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

f. $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 5, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

g. $x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2)$

h. $x \mapsto |x| + x$

i. $x \mapsto \frac{1}{|x|}$

j. $x \mapsto (\operatorname{sgn}(x))^2$

k. $x \mapsto x^2 + \operatorname{sgn}(x)$

l. $x \mapsto x^2 + x|x|$

F68 $f : x \mapsto x + 3$

$g : x \mapsto |x + 3|$

$h : x \mapsto \frac{1}{x + 3}$

$k : x \mapsto (x + 3)^2$

Milyen értékre lesz

$f(x) = 0$

$g(x) = 0$

$h(x) = 0$

$k(x) = 0$

$f(x) > 0$

$g(x) > 0$

$h(x) > 0$

$k(x) > 0$

$f(x) < 0$

$g(x) < 0$

$h(x) < 0$

$k(x) < 0$

$f(x) = 4$

$g(x) = 4$

$h(x) = 4$

$k(x) = 4$

$f(x) > 4$

$g(x) > 4$

$h(x) > 4$

$k(x) > 4$

$f(x) < 4$

$g(x) < 4$

$h(x) < 4$

$k(x) < 4$

$f(x) = -2$

$g(x) = -2$

$h(x) = -2$

$k(x) = -2$

$f(x) = g(x)$

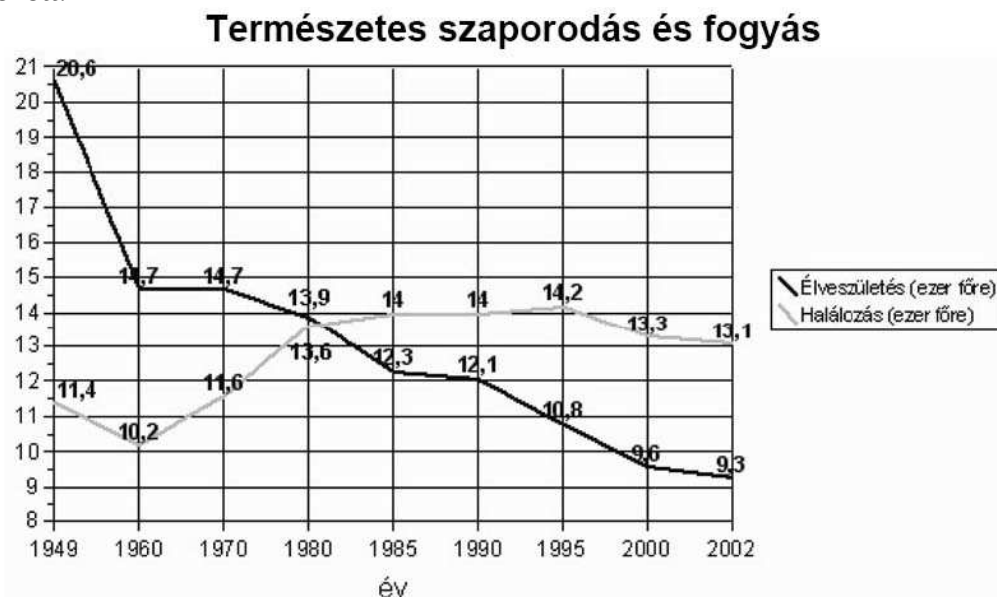
$k(x) = g(x)$

$f(x) = h(x)$

$f(x) = k(x)$

Statisztika

F69 A grafikon a természetes szaporodás és fogyás értékét mutatja hazánkban 1949 és 2002 között.



Válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!

- Mely időszakban nőtt, mely időszakban csökkent Magyarország lakossága?
- Hogyan jellemeznéd az élve születések számát és a halálozások számát az adott időszakban?
- Mikor nőtt a legjobban, illetve mikor nem változott hazánk népessége az adott időszakban?
- 1995 óta csökken az 1000 főre jutó halálozások száma. Miért fogy mégis Magyarország népessége?
- Foglald táblázatba az adatokat! Számítsd ki a természetes szaporodás vagy fogyás értékeit a megadott időszakokra!

Év	Élveszületés (ezer főre)	Halálozás (ezer főre)	Szaporodás vagy fogyás (ezer főre)
1949	20,6	11,4	
1960	14,7	10,2	
1970	14,7	11,6	
1980	13,9	13,6	
1985	12,3	14	
1990	12,1	14	
1995	10,8	14,2	
2000	9,6	13,3	
2002	9,3	13,1	

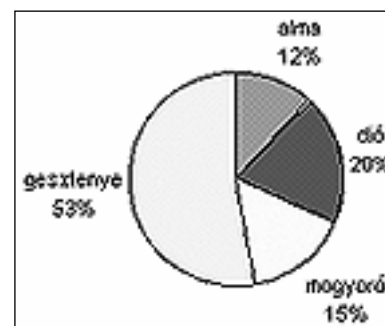
F70 A XX. Század utolsó öt olyan olimpiáján, amelyen a magyar csapat részt vett, a következő érmes helyezéseket érték el:

	Moszkva 1980	Szöul 1988	Barcelona 1992	Atlanta 1996	Sydney 2000
arany	7	11	11	7	8
ezüst	10	6	12	4	6
bronz	15	6	7	10	3

Ábrázold az adatokat oszlopdiagramon

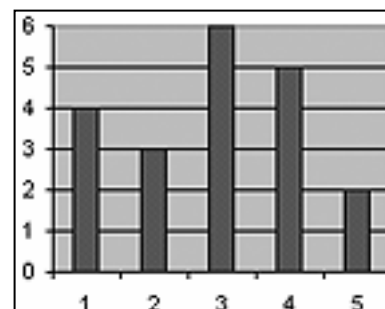
F71 A diagram Pisti által az ebéd után elfogyasztott gyümölcsök szénhidráttartalmát mutatja százalékban.

- Készíts előbb táblázatot, majd oszlopdiagramot a kördiagram alapján, ha tudjuk, hogy Pisti összesen 60 g szénhidrátot vett magához a gyümölcsökkel! Az értékeket grammban add meg!
- Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes cikkekhez?

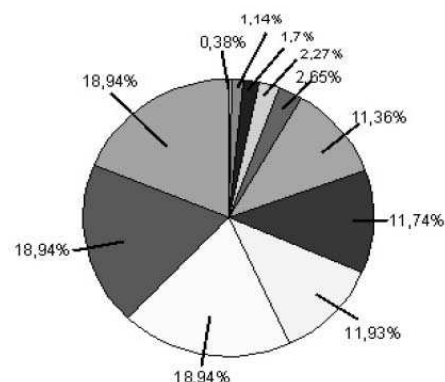
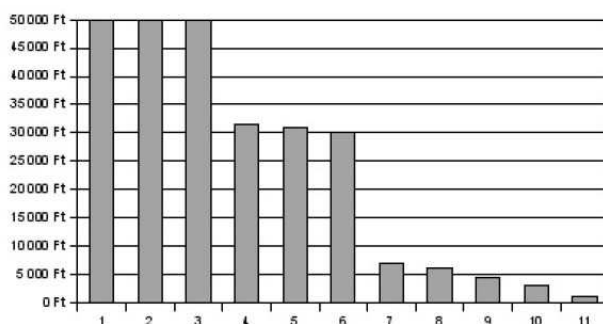


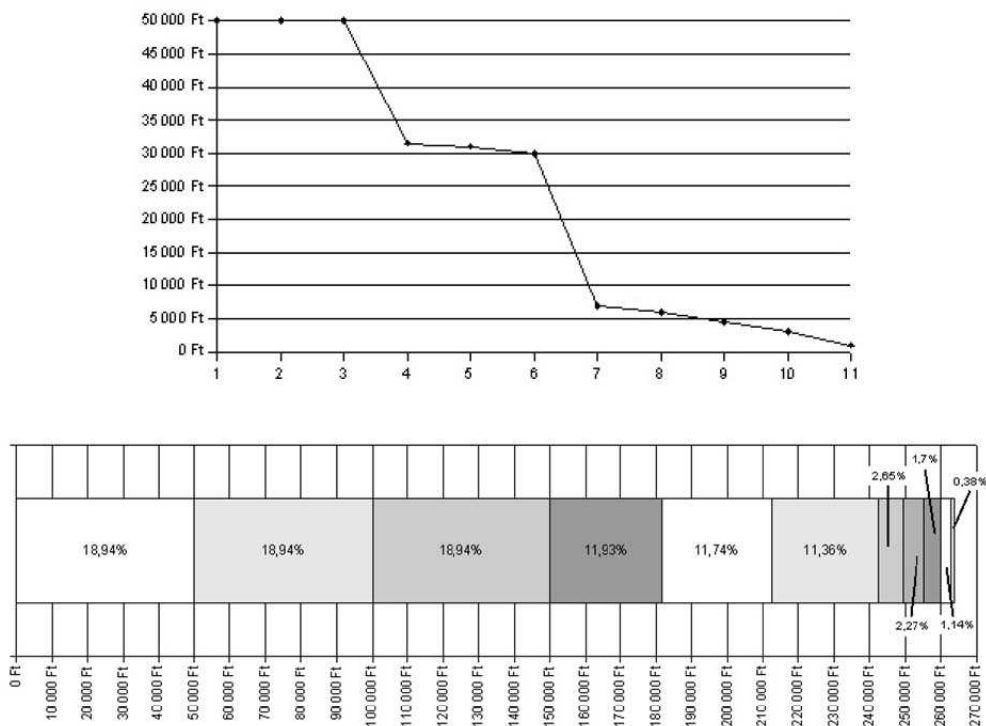
F72 A diagramon valamely osztály matematika-dolgozatának eredményei láthatók, osztályzat szerinti összesítésben.

- Milyen fajta diagramot látsz az ábrán?
- Olvasd le az eredményeket, és készíts táblázatot, majd kördiagramot belőlük!
- Hányan járnak az osztályba?



F73 Egy vállalat 11 dolgozójának jutalmat osztottak. A dolgozók a következő összegeket kapták: 50 000 Ft, 50 000 Ft, 50 000 Ft, 31 500 Ft, 31 000 Ft, 30 000 Ft, 7000 Ft, 6000 Ft, 4500 Ft, 3000 Ft, 1000 Ft. Az alábbi grafikonok közül melyik jellemzi legjobban az adatsort?





- Milyen fajta diagramokat látsz?
- Hiányzik-e valami a diagramokról?
- Melyik illik legjobban az adatsorhoz?
- Milyen adatot könnyű, melyet nehéz (vagy lehetetlen) leolvasni az egyes grafikonokról?
- Melyikről lehet a legkevesebb, melyikről a legtöbb adatot leolvasni?

1957-ben, a 10. játékhéten kezdték a lottószámok húzását Magyarországon. Az alábbi táblázat tartalmazza, hogy melyik számot hányszor húzták ki 2005 végéig. (Összesen 2548 játékhét adatait tartalmazza a táblázat.)

1	142	11	138	21	138	31	125	41	144	51	155	61	140	71	150	81	148
2	122	12	159	22	151	32	148	42	158	52	139	62	132	72	153	82	131
3	166	13	159	23	149	33	141	43	140	53	131	63	112	73	146	83	138
4	135	14	133	24	144	34	146	44	131	54	149	64	159	74	132	84	137
5	122	15	144	25	148	35	146	45	138	55	141	65	139	75	170	85	141
6	140	16	132	26	131	36	145	46	140	56	161	66	154	76	143	86	161
7	151	17	133	27	136	37	142	47	160	57	128	67	149	77	169	87	124
8	134	18	147	28	135	38	138	48	129	58	132	68	132	78	145	88	117
9	124	19	143	29	167	39	117	49	154	59	141	69	156	79	139	89	126
10	163	20	150	30	122	40	131	50	141	60	146	70	124	80	135	90	143
	1399		1438		1421		1379		1435		1423		1397		1482		1366

F74 Melyik középértéket könnyű meghatározni a táblázat alapján? Ezt adjátok is meg!

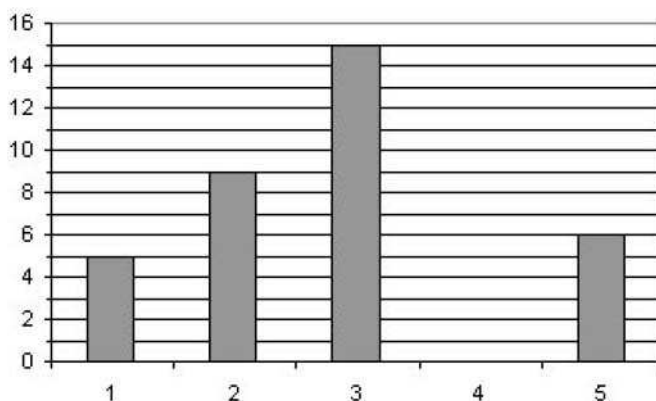
F75 Határozzátok meg a lottószám-húzások másik két középértékét is! Van-e jelentőségük ezeknek az értékeknek a lottófogadás szempontjából?

F76 Pali és Peti kikeresték a táblázatból, hogy mely számokat húzták ki a legtöbbször, és melyeket a legkevesebbszer. A legkevesebbszer a 2, 5, 39, 63, 88 számötöst, a legtöbbször a 3, 10, 29, 75, 77 számötöst.

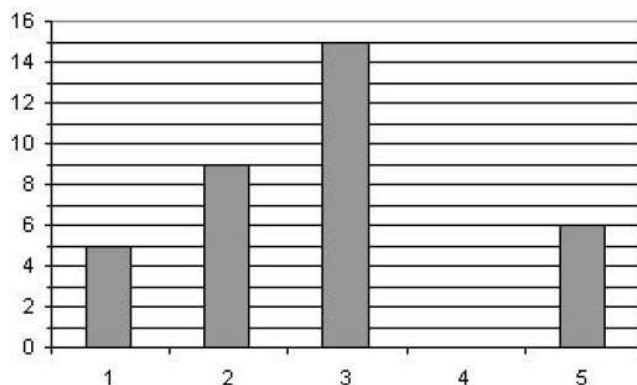
Pali az első számötöst akarja megjátszani, mivel ezek szerepeltek eddig a legkevesebbszer, ezért szerinté most nagyobb eséllyel kerülnek elő a húzáskor. Peti ezzel szemben a második számötöst akarja megtenni, hiszen ezek láthatólag nagyobb valószínűséggel szerepelnek a húzások során.

Mi a véleményed, melyiküknek van igaza?

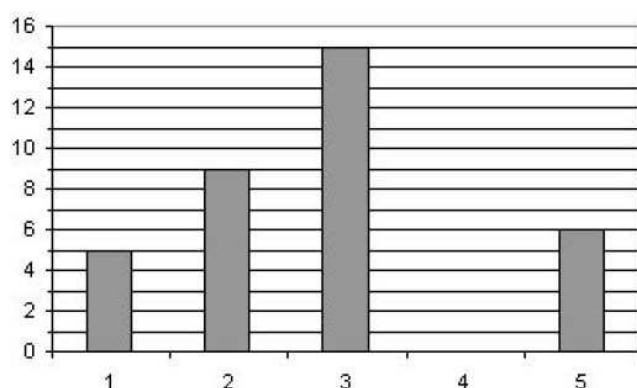
- F77** Lehet-e egy 30 fős osztályban írt félévi dolgozatok átlaga 4,15? A tanár csak egész jegyeket ad a dolgozatokra.
- F78** Egy nagycsaládban a gyerekek átlagéletkora 11 év. A legidősebb közülük 17 éves, a többiek átlagéletkora 10 év. Hány gyerek van a családban? (Minden gyerek életkorát egész számnak vesszük.)
- F79** Egy mozi pénztáránál megfigyelték, hogy az éppen aktuális sikerfilmre ki hány jegyet vesz. Ezt ábrázolja az alábbi diagram. Az első oszlop az 1 jegyet vásárlók számát, a második a 2 jegyet vásárlókét..., stb. mutatja. Sajnos az egyik oszlop kimaradt.
- a. Rajzold be a kimaradt oszlopot, ha az ábrázolt adatsor mediánja 3!



- b. Rajzold be a kimaradt oszlopot, ha az ábrázolt adatsor mediánja 2!



- c. Rajzold be a kimaradt oszlopot, ha az ábrázolt adatsor átlaga $2\frac{19}{20}$!



- F80** Egy családban 5 kereső van: 3 férfi és 2 nő. A férfiak havi átlagkeresete 155 000 Ft, a nőké 125 000 Ft. Mennyi a keresők havi átlagjövedelme? Mennyi a családban az egy főre jutó havi jövedelem, ha a keresőkön kívül még 3 gyerek tartozik a családhoz?
- F81** A Macskák és az Egerek békekonferenciát szerveznek. A tanácskozáson összesen 180-an vesznek részt és átlagéletkoruk 10 év. A konferencián levő Macskák átlagéletkora azonban 15 év, míg az Egereké 9 év. Hány egér vesz részt a konferencián?

- F82** Egy vállalat 11 dolgozójának jutalmat osztottak. A dolgozók a következő összegeket kapták: 50 000 Ft, 50 000 Ft, 50 000 Ft, 31 500 Ft, 31 000 Ft, 30 000 Ft, 7000 Ft, 6000 Ft, 4500 Ft, 3000 Ft, 1000 Ft.
- Az igazgató azt gondolta, hogy a legtöbben a legmagasabb összeget kapták, így a dolgozók elégedettek lehetnek a jutalommal.
 - A szakszervezet vezetője elégedetlen a jutalom mértékével, mert szerinte a 24 000 Ft kis összeg.
 - a. Melyikük hogyan (milyen számadattal) jellemezte ezt az adatsort? (Melyik statisztikai mutatót választotta a véleménye alátámasztására?)
 - b. Te melyikükkel értesz egyet?

Gyakorló feladatok az epochazáróhoz

- F83** A következő hozzárendeléseknél **add meg** az alap- és képhalmazt! **Vizsgáld meg**, hogy a hozzárendelés függvény-e! Válaszodat **indokold**!
Minden emberhez hozzárendeljük a nevét.
Minden számhoz hozzárendeljük az ellentettjének reciprokánál egyel nagyobb számot.
- F84** **Add meg** a következő függvényeket képlettel!
Minden egész számhoz hozzárendelem az abszolút értékénél kettővel kisebb számot.
Minden számhoz hozzárendelem a reciprokának abszolút értékét.
- F85** A következő függvényeknek **határozd meg** az értelmezési tartományát, és **számold ki** a megadott helyeken a helyettesítési értéket!

$$f(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} \quad \text{ÉT:} \quad f(-3) = \quad f\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$g(x) = \frac{1}{2}|x-2| + x^2 \quad \text{ÉT:} \quad g(0,2) = \quad g\left(-\frac{2}{3}\right) =$$

- F86** **Ábrázold** közös koordináta rendszerben a következő függvényeket!

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 2 \quad g(x) = 4 - 2x \quad h(x) = \frac{2x-4}{3}$$

Válaszolj a következő kérdésekre:

- c. A g függvény meredeksége: $m =$
- d. A g függvény az y tengelyt a metszi
- e. Adj meg olyan függvényt, amelynek grafikonja párhuzamos a h függvénnyel!
- f. Legyen $A(1,?)$ és $B(?,2)$. Add meg a pontok hiányzó koordinátáját, hogy ezek az f függvény grafikonjára essenek!
- g. Mely x -ekre igaz, hogy $f(x) > 0$?
- h. Mely x -ekre igaz, hogy $f(x) \leq g(x)$?

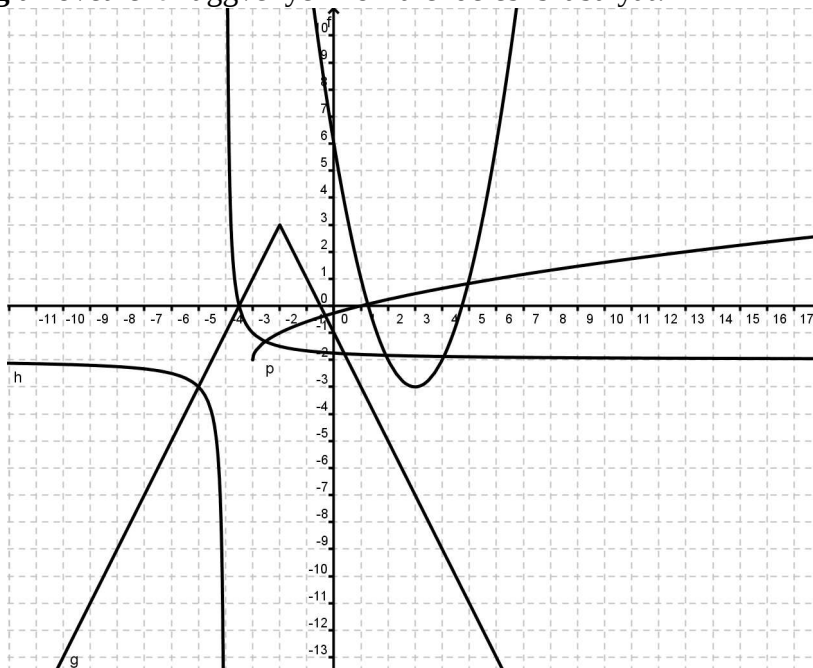
F87 Egy lineáris függvény az x tengelyt a -3 -nál, az y tengelyt a -5 -nél metszi. **Add meg** a függvény hozzárendelési szabályát!

F88 **Ábrázold és jellemezd** a következő függvényeket

a) $f : x \mapsto (x-2)^2 - 1$ $g : x \mapsto |x+2| - 2$ $h : x \mapsto \sqrt{x+4} - 1$ $i : x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$

b) $f : x \mapsto 2|x-2| - 2$ $g : x \mapsto -(x+3)^2 + 4$ $h : x \mapsto -2\sqrt{x+4} - 2$ $i : x \mapsto -\frac{2}{x+1} - 2$

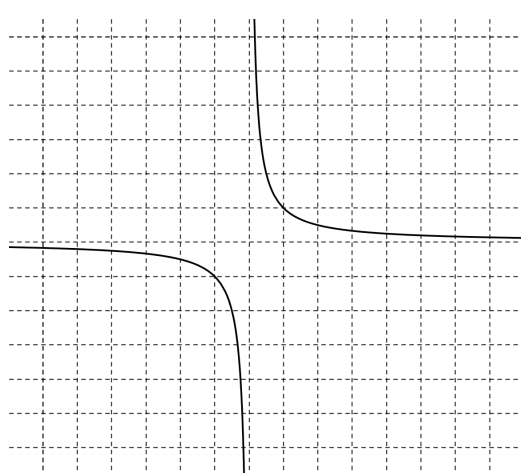
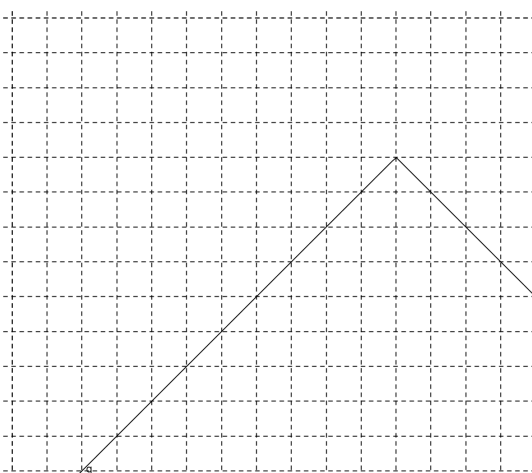
F89 **Add meg** a következő függvények hozzárendelési szabályát!



F90 **Rajzold be** a koordináta tengelyeket, ha adott a függvény hozzárendelési szabálya és a grafikonja!

$$x \mapsto -|x-4| + 3$$

$$x \mapsto \frac{1}{x-2} + 2$$



F91 Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

$$-(x+2)^2 + 3 = -1$$

$$|x+1| - 3 = \frac{1}{3}x + 2$$

$$|x-2| + 2|x-3| = 5$$

$$2(x-4)^2 - 2 \geq 0$$

$$-|x+2| + 4 \leq 0$$

$$(x-2)^2 - 3 \leq x+1$$

F92 Ábrázold a következő függvényeket, és **írd fel** a hozzárendelési szabályokat abszolút érték nélkül!

$$f : x \mapsto -|x-3| + 2$$

$$f : x \mapsto \begin{cases} & \text{ha } x \\ & \text{ha } x \end{cases}$$

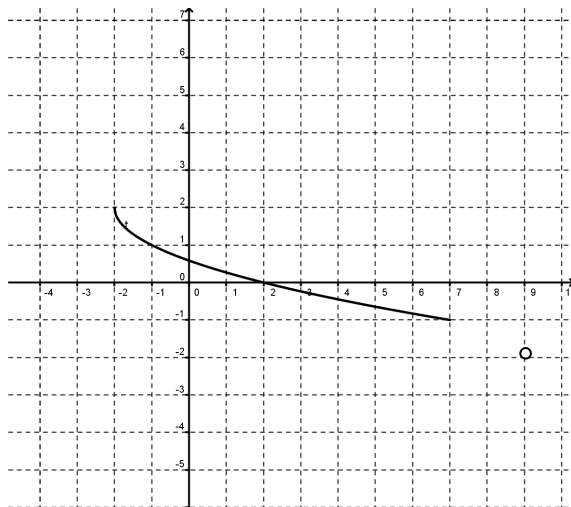
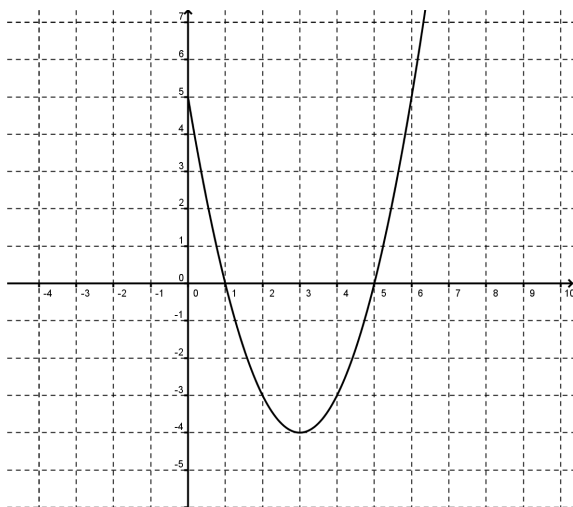
$$g : x \mapsto 2|x+1| + 4$$

$$g : x \mapsto \begin{cases} & \text{ha } x \\ & \text{ha } x \end{cases}$$

F93 Add meg a következő függvények hozzárendelési szabályát, és **jellemezd** a függvényeket!

$$f : \dots \rightarrow \dots \quad x \mapsto$$

$$g : \dots \rightarrow \dots \quad x \mapsto$$



F94 Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

$$g : x \mapsto |(x-2)^2 - 1| - 3$$

$$h : x \mapsto ||x-1| - 2| - 3$$

$$i : \left| \frac{1}{x-3} + 1 \right| - 2$$

$$j : x \mapsto \left| -\sqrt{x+4} + 2 \right| + 1$$